Ö4_V2_mars30

den 1 september 2020 14:52

HG: Kapitel 1: Uppgifter: 17, 32a, 50, 56

17. Visa att vektorerna $\underbrace{(1,2,3,4)}_{b_1}$ $\underbrace{(0,1,2,3)}_{b_2}$ $\underbrace{(0,0,1,2)}_{b_3}$ $\underbrace{(0,0,0,1)}_{b_4}$ bildar en Bas i $\mathbb{R}^4$. Bestäm koordinaterna för $(1,1,1,1)$ i denna bas.

Definition: $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ bas för V, $u \in V$

$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ (1.15)

$u \leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ kallas för u:s koordinater.

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ bas för $V = \mathbb{R}^4$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}}_{b_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}}_{b_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}}_{b_3} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_4} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{[u]_s} = [u]_s = \text{koordinater i Standardbas till } \mathbb{R}^4.$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{[u]_B} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}_{[u]_s}$$

- Matrisen är på trappstegform
- med 4 pivoter
- inga fria kolomner ∴ Unik lösning ∴ unika koordinater.

$$\begin{cases} 1x_1 = 1 & \Longrightarrow x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 & \Longrightarrow x_2 = 1 - 2(x_1) = 1-2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & \Longrightarrow x_3 = 1 - 2x_2 - 3x_1 = 1 - 2(-1) - 3(1) = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 & \Longrightarrow x_4 = 1 - 2x_3 - 3x_2 - 4x_1 \end{cases}$$

$x_4 = 1 - 2(0) - 3(-1) - 4(1) = 0$

$$\boxed{u \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)_B = (1,-1,0,0)_B = [u]_B}$$

Bara för säkerhets skull ska vi testa:

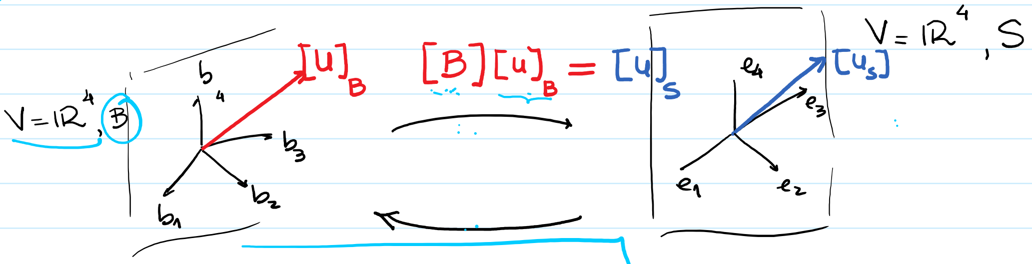
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2-1\\3-2+0\\4-3+0+0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{[u]_s}$$

$[b_1]_s\ [b_2]_s\ [b_3]_s\ [b_4]_s$

$$\boxed{[B] \cdot [u]_B = [u]_s}$$

Basbyte matrisen Från B till Standardbasen $= [T]_{S \leftarrow B}$

till standardbasen $S \leftarrow B$



$$\boxed{[u]_B = [B^{-1}][u]_S}$$

Obs.: Notation:

$$[T]_{S \leftarrow B} = B = (b_1\ b_2 \ldots b_4)$$

$$[T]_{B \leftarrow S} = B^{-1}$$

$$(\underbrace{1,2,3,4}_{b_1}) = 1b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_4 = (1,0,0,0)_B$$

32a. Bestäm matris A så att de givna mängderna utgör Värderummet $V(A)$

a) $$\left\{ \begin{pmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{pmatrix} : r,s,t \in \mathbb{R} \right\} = V(A)$$

Lösning:

$$V(A) = \left\{ r \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v_1} + s \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v_2} + t \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v_3} : r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V(A) = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \qquad \dim V(A) = 3$$

Då $$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

---

50) $V = \text{Span}\{f_1, f_2\}$ $\quad f_1 = \sin x \quad f_2 = \cos x \qquad B = \{f_1, f_2\}$ bas

Låt $g_1 = 2\sin x + \cos x$; $g_2 = 3\cos x$

a) Visa att $B' = \{g_1, g_2\}$ är en Bas för V.

b) Bestäm $[T]$ $\quad [T] \quad \leftarrow$

a) Visa att $B' = \{g_1, g_2\}$ är en bas för V.

(b) Bestäm $\underset{B \leftarrow B'}{[T]}$, $\underset{B' \leftarrow B}{[T]}$

c) $h = 2\sin x - 5\cos x$: Bestäm h:s koordinater i basen B

d) h:s koordinater i basen B' med hjälp av b) och c)

e) Bestäm h:s koordinater i basen B' direkt.

Lösning.

linjärt Oberoende

a) $B' = \{g_1, g_2\}$ är bas för V

$\left[B = \{f_1, f_2\} = \{\sin x, \cos x\} \right.$ Bas för V. $\left. \right]$

$$g_1 = 2\sin x + 1\cos x = 2f_1 + 1f_2 = (2,1)_B$$

$$g_2 = 0\sin x + 3\cos x = 0f_1 + 3f_2 = (0,3)_B$$

$\begin{cases} B' = \{g_1, g_2\} \text{ är oberoende ?} \\ \text{Span}\{g_1, g_2\} = V \text{ ?} \end{cases}$

- via definition

$\boxed{\alpha(g_1) + \beta(g_2) = 0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ unik lösning.

$$\alpha(2\sin x + \cos x) + \beta(3\cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$(2\alpha)\sin x + (\alpha + 3\beta)\cos x = 0 = 0\sin x + 0\cos x$$

$\begin{cases} 2\alpha = 0 & \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \\ \alpha + 3\beta = 0 & \Rightarrow 3\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0} \end{cases}$ unik lösning.

Då $\{g_1, g_2\}$ ä L. O.

(Alternativ: $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\left[[g_1]_B \ [g_2]_B \right]}$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \{[g_1]_B, [g_2]_B\}$ är L. Oberoende.

b) $\underset{B \leftarrow B'}{[T]} = \left[[g_1]_B \ [g_2]_B \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (*)

$[T] = \left([T] \right)^{-1} = \frac{1}{\ } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \end{bmatrix}$

$$\underset{B'\leftarrow B}{[T]} = \left(\underset{B\leftarrow B'}{[T]}\right)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\Big(\underbrace{(g_1)_B \quad (g_2)_B}_{\underset{B\leftarrow B'}{[T]}}\Big)\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}}_{(u)_{B'}} = \alpha (g_1)_B + \beta (g_2)_B = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

c) $h = 2\sin x - 5\cos x$

$B = \{f_1, f_2\} = \{\sin x, \cos x\}$

$[h]_B = 2f_1 - 5f_2 = (2, -5)_B$

$\det(A . A^{-1}) = \underbrace{\det(I)}$

$\det A . \det A^{-1} = 1$

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

d) $[h]_{B'} = ?$

$$\boxed{\underset{B\leftarrow B'}{[T]}\ [u]_{B'} = [u]_B}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{[u]_{B'}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$[u]_{B'} = T^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[u]_{B'}}_{[h]_{B'}} = \frac{1}{6}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{[h]_B}$$

$$[h]_{B'} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e) $h(x) = 2\sin x - 5\cos x$

$= 2\sin x + \cos x - \cos x - 5\cos x$

$= (2\sin x + \cos x) - 6\cos x$

$B' = \{g_1, g_2\}$

$g_1 = 2\sin x + \cos x$

$g_2 = 3\cos x$

$= (2\sin x + \cos x) - 2(3\cos x)$

$= 1(\underbrace{2\sin x+\cos x}_{g_1}) - 2(\underbrace{3\cos x}_{g_2}) = 1g_1 - 2g_2 = (1,-2)_{B'}$

Alternativ via def

$[h]_{B'} = (\alpha, \beta)_{B'} = \alpha g_1 + \beta g_2$

$= \alpha(2\sin x + \cos x) + \beta(3\cos x) = [h]_B = 2\sin x - 5\cos x$

$= (2\alpha)\sin x + (\alpha + 3\beta)\cos x = 2\sin x - 5\cos x$

$\begin{cases} 2\alpha = 2 & \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \alpha + 3\beta = -5 \end{cases}$ $\quad 3\beta = -5 - 1 \quad \beta = \frac{-6}{3} = -2$

$\boxed{\beta = -2}$

$[h]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{B'} = 1g_1 + (-2)g_2$

~~56~~ ←

38

39

(56) De fyra första Hermite-polynomien är

$B' = \{1, 2t, -2+4t^2, -12t + 8t^3\} = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$B = \{\underset{f_1}{1}, \underset{f_2}{t}, \underset{f_3}{t^2}, \underset{f_4}{t^3}\}$ (standard bas)

a) Visa att dessa polynom utgör bas i P_3.

b) Bestäm koordinaterna för

$p(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ i bas B'.

$g_1 = 1 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 = (1,0,0,0)_B$

$g_2 = 2t = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4 = (0,2,0,0)_B$

$g_3 = -2 + 4t^2 = (-2,0,4,0)_B$

$g_4 = -12t + 8t^3 = (0,-12,0,8)_B$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\-12\\0\\8\end{pmatrix}_B \right\}$$

$\underbrace{\# B' = 4}$

$S = \text{Span}\{B'\} = \text{Span}\{g_1, \dots g_4\} \subseteq \mathbb{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\}$

$\underbrace{\dim \mathbb{P}_3 = 4}$

Sats 5 $\left\{ \begin{array}{l} B' \text{ oberoende} \\ \# B' = \dim \mathbb{P}_3 = \dim V \\ \text{Span } B' \subseteq \mathbb{P}_3 \end{array} \right\} \Longrightarrow B'$ bas för V.

b) $p = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3 = (7,-12,-8,12)_B$

$[p]_{B'} = (\alpha, \beta, \gamma, \theta)_{B'} = \underbrace{\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 + \theta g_4} =$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}}_{[T]_{B \leftarrow B'}} \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\theta\end{bmatrix}}_{[p]_{B'}} = \underbrace{\begin{bmatrix}7\\-12\\-8\\12\end{bmatrix}}_{[p]_B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-12\\-8\\12\end{bmatrix}$$

gausselimination eller backsubstitution

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\\3/2\end{pmatrix}_{B'}$$

$$[p]_{B'} = \underset{\smile}{3}g_1 + \underset{\smile}{3}g_2 - \underset{\smile}{2}g_3 + \underset{\smile}{\tfrac{3}{2}}g_4 = \left(3, 3, -2, \tfrac{3}{2}\right)_{B'}$$

---

(38) Låt A, B vara matriser med samma antal rader och Låt C vara matrisen man får av alla kolonner i A och alla kolonner i B

Visa att

$$\operatorname{rang} C \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B.$$

Lösning:

$$U_A = \operatorname{Span}\{\underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_{N_A}}_{\text{oberoende kolonner av } A}\} = V(A) = \text{värderummet}$$

$$\operatorname{rang}(A) = \dim V(A) = N_A$$

$$U_B = \operatorname{Span}\{b_1, b_2 \ldots b_{N_B}\} = V(B) = \text{värderummet}$$

$$\operatorname{rang}(B) = \dim V(B) = N_B$$

$$C = \left(a_1\ a_2 \ldots a_{N_A}\ b_1\ b_2 \ldots b_{N_B}\right)$$

$$\underbrace{V(C)}_{\text{Underrum}} = \operatorname{Span}\{a_1\ a_2 \ldots a_{N_A}\ b_1 \ldots b_{N_B}\} = \operatorname{Span}\{a_1 \ldots a_{N_A}\} + \operatorname{Span}\{b_1 \ldots b_{N_B}\}$$

sat 1.12

$$V(C) = (U_A + U_B)$$

$$\dim(V(C)) = \dim(U_A + U_B) = \dim(U_A) + \dim(U_B) - \dim(U_A \cap U_B)$$

$$\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - \dim(U_A \cap U_B) \leq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$$