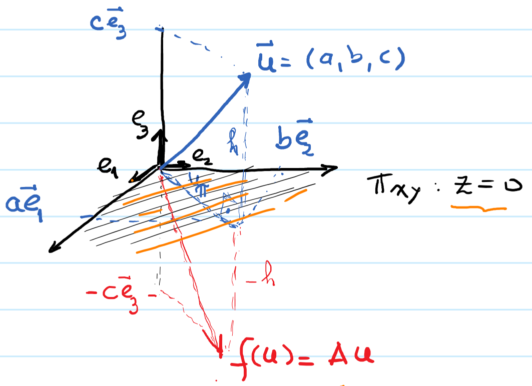
L4_V2_mars31_2021

den 29 mars 2021 18:39

Mål:
1. Basbytesmatris + Linjära avbildningar
2. Uppgifter 43, 44, 39

1. Linjär Avbildning: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \to f(u) = Au$ $\quad f \equiv$ speglingen mot Π_{xy}



$\vec{u} = u_\pi + h$ $\quad \begin{cases} u_\pi = \operatorname{proj}_\pi u \\ h = \operatorname{proj}_{n_\pi} u \end{cases}$

$C = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ Standardbas för $\mathbb{R}^3$

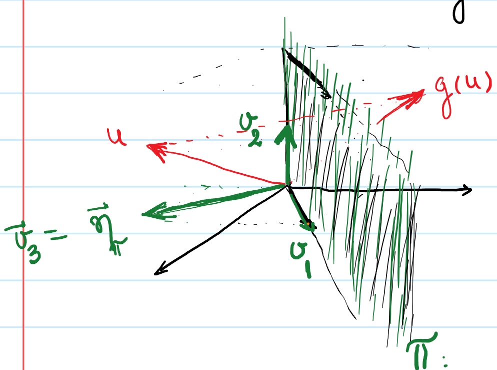
$u = ae_1 + be_2 + ce_3 \leftrightarrow u = (a,b,c)_C$

$$f(u) = af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [A]_{C \leftarrow C} [u]_C$$

A i standardbas C.

$$f(u) = A \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

1.2 Nu $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \to g(u)$ är speglingen i planet Π: $x = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$



$n_\pi = v_1 \times v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$

$v_3 = n_\pi$

$P = \{v_1, v_2, v_3\}$ bas för $\mathbb{R}^3$

$$[P]_{C \leftarrow P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Basbytematrisen från P till C = Standardbas.

Π:

$u = (a,b,c)_G$

G: standard bas

$$\underset{C\leftarrow P}{[P]} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

från P till G = Standard bas.

$$[u]_P = (x, y, z)_P = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

g är en linjär avbildning $\Rightarrow$ $g(u) = g(xv_1 + yv_2 + zv_3) \Rightarrow$

$$g(u) = x\,g(v_1) + y\,g(v_2) + z\,g(v_3)$$

$$= \begin{bmatrix} g(v_1) & g(v_2) & g(v_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Obs $g(v_1) = v_1$
$g(v_2) = v_2$
$g(v_3) = -v_3$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & -v_3 \end{bmatrix}}_{\underset{G\leftarrow P}{[G]}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{[u]_P}$$

om vi skriver $\begin{bmatrix} [v_1]_G & [v_2]_G & [v_3]_G \end{bmatrix}$ Kolonner skrivas med koordinater i bas G

Då $$\underset{G\leftarrow P}{[G]} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (1.2) (a)

Men $g(u) = x\,g(v_1) + y\,g(v_2) + z\,g(v_3)$

$$\underset{P\leftarrow P}{[G]} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{= [u]_P} = \underbrace{\begin{bmatrix} [v_1]_P & [v_2]_P & [v_3]_P \end{bmatrix}}_{\underset{P\leftarrow P}{[G]}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{[u]_P}$$

$$[g(v_1)]_P = [v_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_P = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$[g(v_2)]_P = [v_2]_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_P = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$$

$$[g(v_3)]_P = [-v_3]_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_P = 0v_1 + 0v_2 - 1v_3$$

Då $g: \mathbb{R}^3, P \longrightarrow \mathbb{R}^3, P$ $\quad P = \text{bas} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Då $\quad g: \ ,P \longrightarrow \mathbb{R}^3, P \qquad P = \text{bas} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$[u]_P \longrightarrow g(u) = [G]_{P \leftarrow P}[u]_P$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[G]_P} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{[u]_P} \qquad (1.2)(b)$$

$\Big\{$ Kolonner skrivas med koordinater i bas P.

1.3 $\quad C = \{e_1, e_2, e_3\}$ Standardbas

$$g: \mathbb{R}^3, C \longrightarrow \mathbb{R}^3, C$$

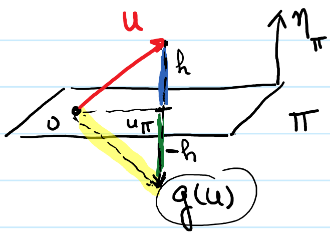
$$u \longrightarrow g(u) = \text{spegling i } \Pi: \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}y + 0z = 0}$$

Hur är $[G]_{C \leftarrow C}$?

1.3 i) Vi konstruerar matrisen G med definition av g.

1.3 ii) Vi konstruerar med basbyte.

1.3.i)



π plan genom origo (Underrum av $V = \mathbb{R}^3$)

$$u = (a,b,c)_C \Rightarrow \text{proj}_n u = \frac{(u \cdot n)}{(n \cdot n)} n = \frac{(a,b,c)\cdot(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)}{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\text{proj}_n u = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{-a+b}{2}, 0\right)$$

$$g(u) = u - 2h$$

$$g(u) = (a,b,c) - (a-b, -a+b, 0)$$

$$g(u) = (b, a, c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [G]_{C \leftarrow C} [u]_C \qquad (1.3)(i)$$

1.3 ii) Nu använder vi Basbyte

•) $\mathbb{R}^3, C \longrightarrow \mathbb{R}^3, P$

$$\underset{C\leftarrow P}{[P]}\,[u]_P = [u]_C$$

$$[u]_P = P^{-1}[u]_C$$

Obs: P är ON-bas $\Rightarrow$
$[P]$ är ortogonal matris $\Rightarrow$
$[P]^{-1} = [P]^t$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

••)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^3, P & \xrightarrow{\;\underset{P\leftarrow P}{[G]}\;} & \mathbb{R}^3, P \\
[u]_P & & \underset{P\leftarrow P}{[G]}[u]_P = [g(u)]_P \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathbb{R}^3, C & \xrightarrow{\;\underset{C\leftarrow C}{[G]}\;} & \mathbb{R}^3, C \\
[u]_C & & \underset{C\leftarrow C}{[G]}[u]_C = [g(u)]_C
\end{array}$$

$$[u]_P = \underbrace{[P]^{-1}}_{P\leftarrow C}[u]_C$$

$$\underbrace{[P]}_{C\leftarrow P}[g(u)]_P = [g(u)]_C$$

$$\boxed{\underset{C\leftarrow C}{[G]}\;[u]_C = \left([P]\left(\underset{P\leftarrow P}{[G]}\right)\left(\underbrace{[P]^{-1}[u]_C}_{[u]_P}\right)\right)}$$

Basbyte + Avbildningsmatrisen

Då $\underset{C\leftarrow C}{[G]} = \underset{C\leftarrow P}{[P]}\;\underset{P\leftarrow P}{[G]}\;\underset{P\leftarrow C}{[P]^{-1}}$ $\quad$ (1.2)(b)

Här $P^{-1} = P^t$ eftersom P är ON-bas

$$\underbrace{\underbrace{\underset{C\leftarrow P}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}\underset{P\leftarrow P}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{C\leftarrow P}{[G]}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{P\leftarrow C}{[P]^{-1}}}}$$

(1.2)(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.3)(ii)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[G]_c^c} \qquad (1.3)(i)$$

Nu kompleterar vi uppgifter 43 och 44 från Ö3
Och diskuterar också uppgift $\underbrace{39}$. (Elevens listan)

U. 43 $\quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x_1 x_2 x_3) \to T(x_1 x_2 x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

a) Visa att T är linjär ✓

b) N(T) är en rätt linje och bestäm dess ekvation

c) V(T) är ett plan och bestäm dess ekvation

d) Bestäm alla urbilder till $\underbrace{(3,2,1)}$ och $(2,1,3)$

Lösning: Nästan klar i Ö3: Bara att komplettera:

$$[A]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [A]_{c \leftarrow c}\,[u]_c$$

$\underbrace{T(u) = Au}$

$$\begin{cases} A.u \text{ är linjär} \\ A(u+v) = Au + Av \\ A(\beta u) = \beta Au \end{cases}$$

b), c), d)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 & | & 3 & | & 2 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & | & -4 & | & -3 \\ -1 & -2 & 2 & | & 0 & | & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gausselimination}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & | & 0 & | & 5/3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & | & 0 & | & -4/3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 & | & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

fri kolonn..

Då N(A)

$$\begin{cases} x_1 = 0 - \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = 0 + \frac{4}{3}x_3 \\ x_3 = t \in \mathbb{R}, \text{ fri} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$N(A) = \text{Span}\{\underbrace{(-2,4,3)}\} \qquad \dim N(A) = 1$$

$$V(A) = \text{Span}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_3}\right\}$$

= Kolonner av A

men $v_2 = \frac{2}{3}v_1 - \frac{4}{3}v_3$

$$V(A) = \text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$$ kolonner av A

men $v_3 = \frac{2}{3} v_1 - \frac{4}{3} v_3$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V(A) = 2 = \underbrace{\text{rang}(A)}$$

* Enligt dimensionssaten: $\boxed{\begin{aligned} &\dim N(A) + \dim V(A) = n \equiv \text{antal kolonner i } A \\ &\quad 1 \quad + \quad 2 \quad = 3. \end{aligned}}$

d) $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(A)$ därför att det finns $X \in \mathbb{R}^3$ så att $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X = X_p + X_H \qquad X = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin V(A)$ och då kan inte skrivas som linjärkombination av A:s kolonner.

Uppgift 44 Avbildning $T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$p(t) \longrightarrow T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

a) visa att T är linjär

b) $N(T)$: bestäm bas och dim

c) $V(T)$: bestäm bas och dim

lösning:

a) $\mathbb{P}_2 : \{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : \underline{a_0, a_1, a_2} \in \mathbb{R} \}$

Låt $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga

$$T((p+q)(t)) = \begin{pmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + q(0) \\ p(1) + q(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \end{pmatrix} = T(p(t)) + T(q(t))$$

$$T((\alpha p)(t)) = \begin{pmatrix} (\alpha p)(0) \\ (\alpha p)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(p(0)) \\ \alpha(p(1)) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \alpha T(p(t))$$

Då är T linjär avbildning.

b) $N(T) = \{ p \in \mathbb{P}_2 : T(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^2 \}$

Låt $p(t) \in \mathbb{P}_2$ $\quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$T(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ eller } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 \end{cases}$$

Då $p(t) = 0 + (-a_2)t + (a_2)t^2 = a_2(-t + t^2) = \underbrace{\alpha(t^2 - t)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Däremot $N(T) = \{ p(t) \in \mathbb{P}_2 : p(t) = \alpha(t^2 - t), \alpha \in \mathbb{R} \}$

$N(T) = \text{Span}\{ p(t) = t^2 - t \}$ $\quad$ dim $N(T) = 1$.

c) $V(T) = \{ T(p) : p \in \mathbb{P}_2 \} = \text{Kol}(A) = V(A)$ $\quad$, $A \equiv$ T:s matrisen

Lösning: $\quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2$.

$$T(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Då $V(T) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

&

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linjärt Oberoende.

Då $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ är bas för $V(T)$ och dim $V(T) = 2$.

39) Låt A, B vara matriser av samma type (dimension)
Visa att
$$\text{rang}(A+B) \leq \text{rang} A + \text{rang} B$$

Lösning:
$V(A) = \text{Span}\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $\quad A_{m \times n}$ och

Låt $\{u_1, u_2, \dots u_k\}$ vara bas för $V(A)$ $\quad k \leq n$.

$V(B) = \text{Span}\{b_1, b_2, \dots b_n\}$ $\quad B_{m \times n}$ och

Låt $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ vara bas för $V(B)$ $\quad q \leq n$.

Då varje kolonn $a_i \in V(A)$ kan skrivas
$$a_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} u_j$$

Samma med $b_i \in V(B)$
$$b_i = \sum_{j=1}^{q} \beta_{ij} v_j$$

Antag $C = A + B$.

Så varje kolonn av C kan skrivas
$$c_i = a_i + b_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{q} \beta_{ij} v_j$$

och då har vi att $V(C) = \text{span}\{u_1, u_2, \dots u_k, v_1, v_2, \dots v_q\}$

Däremot $\quad \text{rang}(C) \leq k + q = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$

$$\text{rang}(C) = \dim V(C) \leq \boxed{\dim V(A) + \dim V(B)}$$

enligt Sats 1.12

$\square$