L5_V3_april12:e

den 29 mars 2021 18:39

Def: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ skalär produkt så $\forall\, u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iv) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$

$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

Ex: $V = C[a,b]$ linjär rum av kontinuerliga funktioner i $I = [a,b]$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$ är en skalär produkt i V.

Bevis:

Antag godtyckliga funktioner $f, g, h \in V = C[a,b]$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)\, dt = \int_a^b g(t) f(t)\, dt = \langle g, f \rangle$

2) $\langle \alpha f, g \rangle = \int_a^b \alpha f(t) g(t)\, dt = \alpha \int_a^b f(t) g(t)\, dt = \alpha \langle f, g \rangle$

3) $\langle f + g, h \rangle = \int_a^b (f(t) + g(t)) h(t)\, dt = \int_a^b (f(t) h(t) + g(t) h(t))\, dt =$

$= \int_a^b f(t) h(t)\, dt + \int_a^b g(t) h(t)\, dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

4) $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(t)\, dt$

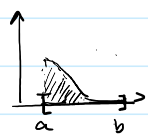
4i) Vi behöver visa att $\int_a^b f^2(t)\, dt \geqslant 0$

och

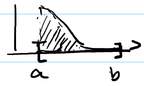
$\int_a^b f^2(t)\, dt = 0 \iff f(t) = 0, \forall t \in [a,b]$.

4.i * given $f \in C[a,b]$,

$f^2(t) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)\, dt \geqslant 0$



$f^2(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a f^2(t)\,dt \geq 0$



Vad vi behöver visa är att:

⊛ → Om $\left[\underbrace{f \not\equiv 0}_{\text{inte nollfunktion}} \right]$ Då $\left[\langle f, f \rangle > 0 \right]$ $\quad (p \Rightarrow q)$

$\left[\langle f, f \rangle = 0 \right] \quad \Rightarrow \quad \left[f(t) = 0, \forall t \in [a,b] \right]$ $\quad$ motsvarande $(\sim q \Rightarrow \sim p)$

⊛ Vi vill visa att f inte nollfunktion, då $\langle f, f \rangle > 0$.

Bevis:

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ kontinuerlig

Antag att f inte nollfunktion då finns det $x_0 \in [a,b]$ så att $f(x_0) \neq 0$. och $f^2(x_0) > 0$

Hur f är kontinuerlig i $[a,b]$ given $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ så att

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

&

$|f^2(x) - f^2(x_0)| < \varepsilon$

Antag $\varepsilon = \frac{f^2(x_0)}{2} > 0$, då finns det $\delta_* > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta_* \Rightarrow |f^2(x) - f^2(x_0)| < \frac{f^2(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{f^2(x_0)}{2} < f^2(x) - f^2(x_0) < \frac{f^2(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\underbrace{0 < \frac{f^2(x_0)}{2} = f^2(x_0) - \frac{f^2(x_0)}{2} < f^2(x)} < f^2(x_0) + \frac{f^2(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{f^2(x_0)}{2} < f^2(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta_*, x_0 + \delta_*)$$

Me i så fall

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq \int_{x_0 - \delta_*}^{x_0 + \delta_0} f^2(x)\,dx \geq \int_{x_0 - \delta_*}^{x_0 + \delta_*} \frac{f^2(x_0)}{2}\,dx = \frac{f^2(x_0)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\delta_* > 0$$

a $\quad x_0 - \delta_x \quad x_0 - \delta_x$

Däremot $\begin{cases} f \not\equiv \text{nollfunktion} \Rightarrow \langle f, f \rangle > 0. \\ \text{motsvarande: } \langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv \text{nollfunktion i } [a,b]. \end{cases}$

$\square$

Viktiga Resultaten

Sats 2.1 Cauchy-Schwartz Olikhet

$$\begin{cases} |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall\, u, v \in V \\ |\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \underset{\text{omm}}{\Longleftrightarrow} \{u, v\} \text{ linjärt Beroende.} \end{cases}$$

Sats 2.2 Triangelolikhet

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$$

Bevis

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq$$

$$\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq}$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Exempel 2.5 (sidan 63)

Låt $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u, v \in V$ = Vektorrum med skalärprodukt.

Antag $\|u\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \|v\| = 2\|u - v\|$. Bestäm $\alpha = \measuredangle(u, v)$ = vinkeln mellan u och v.

Lösning:

Kom ihåg $\measuredangle(u, v) = \theta \quad \therefore \quad \cos\theta = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

Vi behöver hitta $\langle u, v \rangle$ beroende på $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u - v\|$

- $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$
$= \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2\langle u,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2$

Då $\boxed{\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u-v\|^2}$

Nu kan vi räkna $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{1}{2}\frac{\|u\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|u\|}\cdot\|v\|} + \frac{1}{2}\frac{\|v\|^{\cancel{2}}}{\|u\|\cdot\cancel{\|v\|}} - \frac{1}{2}\frac{\|u-v\|^2}{\|u\|\cdot\|v\|} \Rightarrow$$

Enligt Hypotes: $\|u\| = \frac{2}{\sqrt{3}}\|v\| = 2\|u-v\|$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\|u\| = \|v\|$ och $\|v\| = \sqrt{3}\,\|u-v\|$

Så

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{\|u\|}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{\|u\|}} + \frac{1}{2}\frac{\cancel{\|v\|}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\cancel{\|v\|}} - \frac{1}{2}\frac{\cancel{\|u-v\|^2}}{2\cancel{\|u-v\|}\cdot\sqrt{3}\cancel{\|u-v\|}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\cancel{3}}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

Upp. 29 kapitel 1. $\begin{cases} U_1, U_2 \text{ underrum till } V \quad (U_i \not\subseteq U_j) \quad \begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \\ j\neq i \end{cases} \\ \text{Då } U_1 \cup U_2 \text{ ej underrum till } V. \end{cases}$

Lösning: (Vi ska använda motsägelse)

Enligt hipotes $\exists\, u \in U_1,\ u \notin U_2 \Rightarrow u \in U_1 \cup U_2$
$\exists\, v \in U_2,\ v \notin U_1 \Rightarrow v \in U_1 \cup U_2$

Om $U_1 \cup U_2$ är ett underrum till V då

$u+v \in U_1 \cup U_2$ och det betyder att

$u+v \in U_1$ eller $u+v \in U_2$.

i) om $u+v \in U_1$, och U_1 underrum

det finns $-u \in U_1$ och $(u+v)+(-u) \in U_1 \Rightarrow v \in U_1$???

men enligt hipotes $v \notin U_1$.

ii) Då måste vi ha att $u+v \in U_2$

Hur U_2 är också ett underrum till V, U_2 är stängd till $(+)$ och λ.

$v \in U_2$, $-v \in U_2$, $u+v \in U_2 \Rightarrow$

$(u+v)+(-v) \in U_2 \Rightarrow u \in U_2$??? motsägelsa igen!

Då kan $U_1 \cup U_2$ inte vara ett underrum. $\square$