

Kap. 1 sidan 51

(58) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 8}$ har $\text{rang } A = 3$
 Bestäm $\dim N(A)$, $\dim \text{Row}(A)$, $\text{rang}(A^T)$

Lösning

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{18} \\ a_{21} & \dots & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{28} \\ a_{31} & \dots & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{38} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

i) $\text{rang}(A) = \dim V(A) = 3$ $V(A) = \text{kolonn rum}$

• $\dim V(A) + \dim N(A) = n = \text{antal kolonner av } A = 8$

$$\dim N(A) = n - \dim V(A)$$

$$\dim N(A) = 8 - 3 = 5$$

ii) $\text{Row}(A) \Rightarrow 3$ oberoende rader
 därför $\text{rang}(A) = 3$

$$\dim(\text{Row}(A)) = \text{rang}(A) = 3$$

iii) $\text{rang } A^T$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{18} & a_{28} & a_{38} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{KE}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

linjär oberoende:

 $A_{3 \times 8}$

$$\dim V(A^T) = 3$$

$$\text{rang}(A^T) = 3$$

$$\dim N(A^T) = 0$$

$$A^T = B_{8 \times 3}$$

↑ ↑ $n = 3$ antal kolonner

$$\dim V(B) + \dim N(B) = n = 3$$

$$3 + \dim N(B) = 3$$

$$\dim N(B) = 3 - 3 = 0$$

$$\dim N(B) = 3 - 3 = 0$$

59

- i) vad är största möjliga rang hos $A_{7 \times 5}$?
- ii) Om $A_{5 \times 7}$ vad är största möjliga rang hos A ?
- iii) Om $A_{6 \times 8}$ vad är minsta möjliga $\dim N(A)$?

Lösning:

$$A_{7 \times 5} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \dots & a_{55} \\ a_{61} & \dots & a_{65} \\ a_{71} & \dots & a_{75} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(A) \leq 5$$

$$ii) A_{5 \times 7} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \dots & a_{55} & a_{56} & a_{57} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(A) \leq 5$$

$$iii) A_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{61} & \dots & a_{66} & a_{67} & a_{68} \end{bmatrix}$$

$$\dim V(A) + \dim N(A) = n = 8$$

$$\textcircled{6}$$

$$\dim N(A) = 8 - 6 = 2$$

= minsta
möjliga
 $\dim N(A)$.

60) $u, v \in \mathbb{R}^n \quad u \neq 0, v \neq 0$

60) $u, v \in \mathbb{R}^n$ $u \neq 0, v \neq 0$

Visa att $\text{rang } u \cdot v^T = 1$

Lösning: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad v^T = (v_1 \dots v_n)$

$$A = u \cdot v^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -u_1 v^T \\ -u_2 v^T \\ \vdots \\ -u_n v^T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{gauss elim}} \begin{pmatrix} -u_1 v^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{rang } A = 1 \\ \text{rang } (A^T) = 1 \end{cases}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} v^T & 0 & \dots & 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basbyte: exempel: $V = \mathbb{R}^2$

$E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ standard bas.

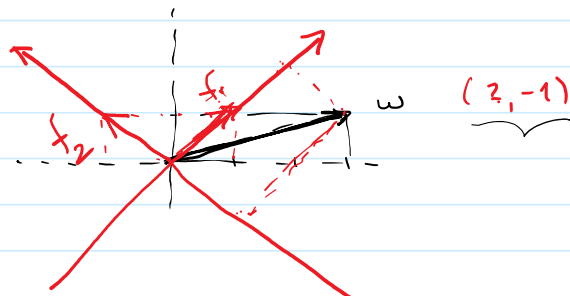
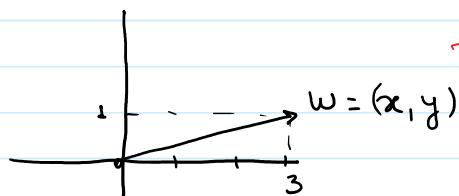
$F = \{f_1, f_2\}$

$\bar{e}_1 = (1, 0)$

$f_1 = (1, 1)$

$\bar{e}_2 = (0, 1)$

$f_2 = (-1, 1)$



$$w = (x, y)_E = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2$$

$$w = (3, 1) = 3 \bar{e}_1 + 1 \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[w]_F = (a, b)_F$$

$$= a f_1 + b f_2$$

$$= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

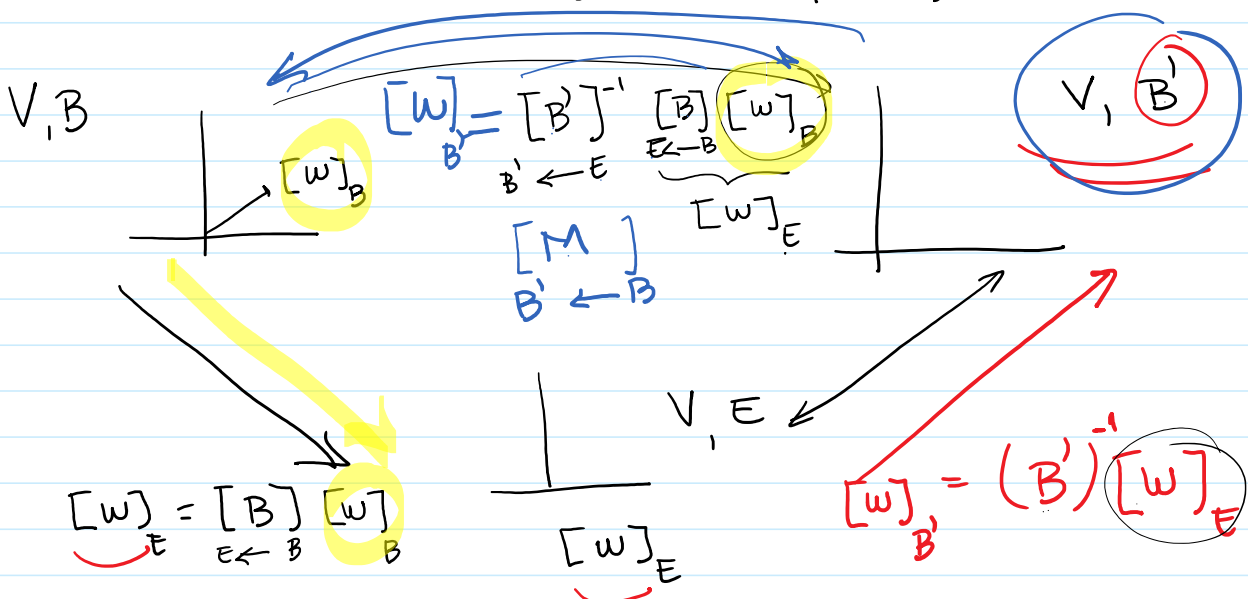
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [w]_E & = & [B] & [a]_F \\ \uparrow & & E \leftarrow F & \end{matrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \vec{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \begin{matrix} [\vec{B}] \\ E \leftarrow B \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$



Jag skriver allt med koordinater nu:

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ Basbyte matrisen från B till $E = \text{standard bas}$: $[B]_{E \leftarrow B}$

$$[B]_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u_1]_E & [u_2]_E & [u_3]_E \end{bmatrix}$$

$$[w]_B = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_E + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_E + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = [w]_E$$

$$\begin{bmatrix} [B]_{E \leftarrow B} [w]_B = [w]_E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E$$

$B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ en andra bas till $\mathbb{R}^3$.

$[B']_{E \leftarrow B'}$ basbyte matrisen från bas B' till $E = \text{standard basen}$.

$$[B']_{E \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Då

$$[w]_{B'} = (k_1, k_2, k_3)_B = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

När vi skriver v_1, v_2 och v_3 med koordinater i bas E har vi

$$k_1 \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix}_E + k_2 \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix}_E + k_3 \begin{bmatrix} v_3 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E$$

$$\begin{bmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E$$

$E \leftarrow B'$

$$[M]_{B' \leftarrow B} [w]_B = [w]_{B'}$$

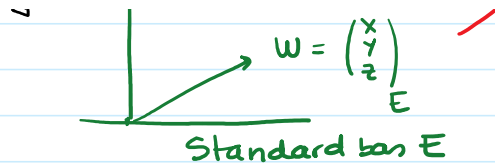
$$[w]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_{B'}$$

$$[B'] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = [B']^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[B]_{E \leftarrow B} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E$$



Då $[M]_{B' \leftarrow B}$:

$$[w]_{B'} = [B']^{-1} [B] [w]_B$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Exemple

$$[w]_E = (-5, 8, -5)_E \quad ? [w]_B ? \quad ? [w]_{B'} ?$$

$$1) [w]_E = [B] [w]_B$$

$$[B]^{-1} = [B]_{B \leftarrow E}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E = (B) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_B \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}_E$$

$$2) [w]_E = [B'] [w]_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E = (B') \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_{B'} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_{B'} = (B')^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E$$

$$[w]_{B'} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{pmatrix}_{B'}$$

Bara att verifiera:

$$-\frac{7}{2}(v_1) + \frac{23}{2}(v_2) + 6(v_3) =$$

$$-\frac{7}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{23}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} + \frac{23}{2} - 6 \\ -\frac{7}{2} + \frac{23}{2} + 0 \\ +\frac{35}{2} - \frac{69}{2} + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 16/2 \\ -34/2 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E$$

Då är $\begin{pmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}_E$

—, —

Att visa att $[M]_{B' \leftarrow B}$ är rätt

1) $[v_1]_{B'} = [1, 0, 0]_{B'} = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}_E = (v_1)_E$

2) $[w]_B = B^{-1}(v_1)_E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9+1+25 \\ -3-1-15 \\ -6+0-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/2 \\ -19/2 \\ -26/2 \end{pmatrix}_B$

3) $[w]_{B'} = [M]_{B' \leftarrow B} \begin{bmatrix} 35/2 \\ -19/2 \\ -26/2 \end{bmatrix}$ vi måste komma tillbaka till $(1,0,0)_B$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ -19 \\ -26 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 105 - 38 - 65 \\ -70 + 57 + 13 \\ 175 - 19 - 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$$

OK