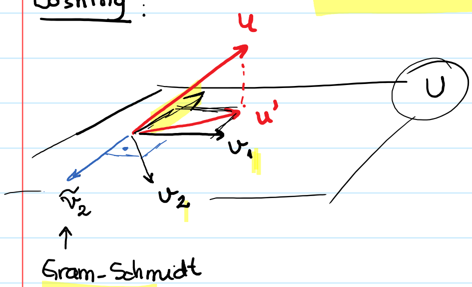
Ö6_V3_15april

den 15 april 2021 10:15

HG 2: 21, 32, 37, 39

21) Ange Ortogonala projektionerna av $u = (0,4,4,0)$ på $U \subseteq \mathbb{R}^4$, underrum
$U = \text{span}\{\underbrace{(1,1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1,1,-1)}_{v_2}\}$. Bestäm avståndet från u till U.

Lösning:



• ? Är $\{v_1, v_2\}$ ortogonal bas för U ?

$\langle v_1, v_2 \rangle = (1,1,1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$ ✓

→ Ja! (Då behöver vi inte Gram-Schmidt)

•• $\{v_1, v_2\}$ Ortogonal bas för U, då är

$$\boxed{\text{proj}_U u = \text{proj}_{v_1} u + \text{proj}_{v_2} u}$$

$$= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$(0,4,4,0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4+4 = 8$

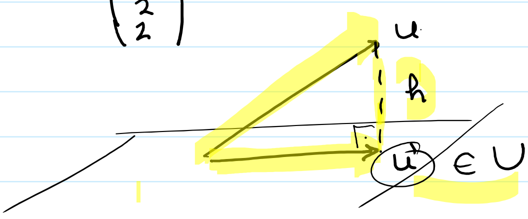
$(1\,1\,1\,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 4$

$$= \frac{8}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{0}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$(0\,4\,4\,0)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = -4+4 = 0$

$$\text{proj}_U u = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} = u'$$

Då



$h = u - u'$ $\quad h \perp u'$

$d(u, U) = \|h\| = \|u - u'\|$

$$h = \begin{pmatrix}0\\4\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$\|h\| = \sqrt{4+4+4+4} = \sqrt{16} = 4$

$\underline{\underline{d(u, U) = 4}}$

---

32) V, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ linjär rummet med $\langle \cdot;\cdot \rangle$; $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormerad bas för V

32) $V, \langle \cdot,\cdot \rangle$ linjär rummet med $\langle \cdot ; \cdot \rangle$; $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormerad bas för V

$$\begin{cases} 3e_1' = e_1 + 2e_2 + 2e_4 \\ 3e_2' = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ 3e_3' = 2e_2 + e_3 - 2e_4 \\ 3e_4' = -2e_1 + 2e_3 + e_4 \end{cases}$$

standard Bas

a) Verifiera att också $\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ är ortonormerad bas

b) Uttryck koordinaterna i $\mathcal{E}'$ med hjälp av $\mathcal{E}$.

$[x]_{\mathcal{E}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \to [x]_{\mathcal{E}'} = (x_1', x_2', x_3', x_4')$

Lösning

$\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$

$$A = \frac{1}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A är ortogonal

$\|a_i\| = 1$, $\langle a_i\, a_j \rangle = 0$ $i \neq j$

$\langle e_1', e_2' \rangle = 0$ $\quad \langle e_2', e_3' \rangle = 0$ $\quad \langle e_3', e_4' \rangle = 0$

$\langle e_1', e_3' \rangle = 0$ $\quad \langle e_2, e_4' \rangle = 0$

$\langle e_1', e_4' \rangle = 0$

Då $\langle e_i', e_j' \rangle = 0 \ \forall i \neq j$

Då är $\mathcal{E}'$ en ortogonal bas. för V.

$\|e_i'\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = \frac{1}{9}(1+4+4) = \frac{9}{9} = 1$ då är $\mathcal{E}'$ an ON-bas för V

Så, $A = [M]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$ är basbytematrisen från $\mathcal{E}'$ till $\mathcal{E}$.

Eftersom $\mathcal{E}'$ är ON-bas $\to$ Kolonner av A är ortonormala vektorer $\Rightarrow$

A är en ortogonal matris $\Rightarrow$

$$\boxed{A^{-1} = A^T}$$

Det betyder att Basbyte matrisen från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{E}'$ är A^T.

$$\boxed{\underbrace{[x]}_{\text{Standarda}} = \underbrace{[M]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}}_{A} [x]_{\mathcal{E}'}} \Rightarrow \underbrace{A^T [x]_{\mathcal{E}}} = [x]_{\mathcal{E}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}}$$

Då

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{[x]} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_4' \end{vmatrix}}_{[x]_{\varepsilon'}} \quad \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{A^T = [M]_{\varepsilon' \leftarrow \varepsilon}} \quad \underbrace{\begin{vmatrix} x_4 \end{vmatrix}}_{[x]_\varepsilon}$$

$$\begin{cases} 3x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ 3x_2' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_3' = 2x_2 + 1x_3 - 2x_4 \\ 3x_4' = -2x_1 + 2x_3 + 1x_4 \end{cases}$$

$\square$

sidan 96

37 $A = -A^T$ skevsymetrisk $n \times n$ matris. ~~Visa att:~~

a) Ax är ortogonal mot x (d.v.s. $(Ax)^T x = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$)

b) $I - A$ är inverterbar

c) $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A)$ (de är kommutativa)

d) $T = (I-A)^{-1}(I+A)$ är en ortogonal matris.

Lösning.

a) $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x^T y = 0$

$\langle Ax, x \rangle = (Ax)^T x = x^T A^T x =$ enligt hipotes $A^T = -A$

$= x^T(-A)x = -(x^T A x) = -(Ax)^T \cdot x = -\langle Ax, x \rangle \Rightarrow$

$\boxed{\langle Ax, x \rangle + \langle Ax, x \rangle = 0} \Rightarrow \boxed{2\langle Ax, x \rangle = 0} \Rightarrow \langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Då är $\boxed{Ax \perp x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

b) Visa att $(I-A)$ är inverterbar $\leftrightarrow$ $\begin{cases} \det(I-A) \neq 0 \\ (I-A)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ endast lösning.} \end{cases}$ $(*)$

$(I-A)x = 0 \Leftrightarrow Ix - Ax = 0 \Leftrightarrow \boxed{Ax = x}$ $\circledast$

Och då $\langle x, x \rangle \overset{*}{=} \langle x, Ax \rangle \underset{(a)}{=\!=} 0$ $\quad Ax \perp x$

$\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ $\Rightarrow$ $(I-A)x = 0$ har endast lösning $x = 0$.

$\hookrightarrow$ skalärprodukt

$\Rightarrow (I-A)$ är inverterbar. $\square$

$\Rightarrow$ $(I - A)$ är inverterbar. $\square$

---

c) Vi vill visa att $\underbrace{(I+A)(I-A)}_{(i)} = \underbrace{(I-A)(I+A)}_{(ii)}$.

$$(i)\quad (I+A)(I-A) = I.I - \cancel{I.A} + \cancel{A.I} - A.A = I - A^2$$

$$(ii)\quad (I-A)(I+A) = I.I + \cancel{I.A} - \cancel{A.I} - A.A = I - A^2$$

$(i) = (ii)$

$\square$

d) Vi vill visa att $T = (I-A)^{-1}.(I+A)$ är ortogonal matris

Vi vill visa då att $T.T^T \overset{?}{=} I$.

Lösning.:

Notera att i) $(I-A)^T = I^T - A^T = I - (-A) = I + A$

ii) $(I+A)^T = I^T + A^T = I - A$

Nu räcknar vi

$$T.T^T = \left(\underbrace{(I-A)^{-1}.(I+A)}_{T}\right).\left((I-A)^{-1}(I+A)\right)^T =$$

$$= (I-A)^{-1}.(I+A).\left[(I+A)^T.\left((I-A)^{-1}\right)^T\right]$$

$$= (I-A)^{-1}\ \underbrace{(I+A).\left[(I-A)\right.}_{\text{Kommutativ (c)}}.\left.\left((I-A)^{-1}\right)^T\right]$$

$$= \underbrace{(I-A)^{-1}\,(I-A)}_{=I}.(I+A)\left((I-A)^{-1}\right)^T \overset{\circledast}{=}$$

$\circledast$ (b) $(I-A)$ är inverterbar

då $\left((I-A)^{-1}\right)^T = \left((I-A)^T\right)^{-1}$

$$\overset{\circledast}{=} (I+A).\left((I-A)^T\right)^{-1}$$

$$(I+A).(I+A)^{-1} = I$$

$\Rightarrow T^T = T^{-1}$ och $T.T^T = I$ $\Rightarrow$ T är ortogonal

$$\Rightarrow \quad T^T = T^{-1} \quad \text{och} \quad T \cdot T^T = I \quad \Rightarrow \quad \underline{T \text{ är ortogonal}}$$

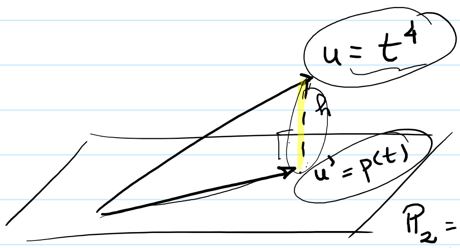
sidan 96

39. Bestäm $p(t) = at^2 + bt + c$ som minimerar integralen $\int_{-1}^{1} (\underbrace{t^4 - p(t)}_{h})^2 \, dt$.

__Lösning__: Våra strategy är att tänka på minstakvadratmetoden. (använda projektion)

Låt $\underline{V = \mathbb{P}_4}$ $\therefore t^4 \in V$

$p(t) \in V$, $p(t) \in \underline{\mathbb{P}_2} \subseteq \mathbb{P}_4$ $\quad$ $\underline{p(t) \in U \text{ underrum.}}$



$$\boxed{h = u - u' = t^4 - p(t)}$$

$\mathbb{P}_2 = \text{Span}\{t^2, t, 1\}$

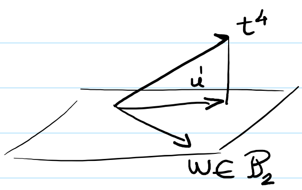
__Obs__: Nu är $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t) \cdot q(t) \, dt \quad \forall p, q \in \mathbb{P}_4 = V.$
skalärprodukten

$$h = t^4 - p(t)$$

$$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_{-1}^{1} h^2 \, dt = \int_{-1}^{1} (t^4 - p(t))^2 \, dt = \|t^4 - p(t)\|^2$$

Då $p(t)$ som minimeras integralen är $\text{proj}_{\mathbb{P}_2} t^4 = \text{proj}_U t^4$

eftersom



$$\|t^4 - u'\| \leq \|t^4 - w\|, \quad \forall w \in \mathbb{P}_2 = U$$

$$\rightarrow \|t^4 - u'\| = \|t^4 - \text{proj}_{\mathbb{P}_2} t^4\|$$

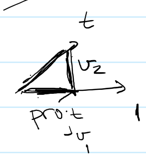
i) 1^{st}: __Bestäm en ON-bas för $\mathbb{P}_2$.__ $\quad$ ($E = \{1, t, t^2\}$ standard bas)

Här använder vi Gram-Schmidt.

$\longrightarrow \underline{v_1 = 1}$ — $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1.1\, dt = 2 \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2}$

då $p_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\longrightarrow v_2 = t - \langle t, p_1\rangle p_1$



$\langle t, p_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t.1\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t^2}{2}\Big|_{t=-1}^{t=1} = 0$

$v_2 = t$

$p_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ $\quad \|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\|v_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$p_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.t$

$\rightarrow v_3 = t^2 - \underbrace{\langle t^2, p_2\rangle}_{(i)} p_2 - \underbrace{\langle t^2, p_1\rangle}_{(ii)} p_1$

(i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2. t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^3 dt = \alpha t^4 \Big|_{t=-1}^{1} = 0$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2. 1\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)$

$v_3 = t^2 - \left(\frac{\cancel{2}}{3\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) 1 = \boxed{t^2 - \frac{1}{3} \cdot 1}$

$p_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$ $\quad \|v_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt =$

$p_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ $\quad \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} + \frac{1}{9}t\right]_{-1}^{1} =$

$\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right) =$

$2/5 - 4/9 + 2/9 = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45}$.

ON-Bas för $\mathbb{P}_2 = \left\{ p_1, p_2, p_3 \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$

ii) Nu Bestämer vi $\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_2} t^4 = \operatorname{proj}_{p_1} t^4 + \operatorname{proj}_{p_2} t^4 + \operatorname{proj}_{p_3} t^4$

$\operatorname{proj}_{p_1} t^4 = \langle t^4, p_1\rangle p_1$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^4\, 1\, dt = \sqrt{2}/5$

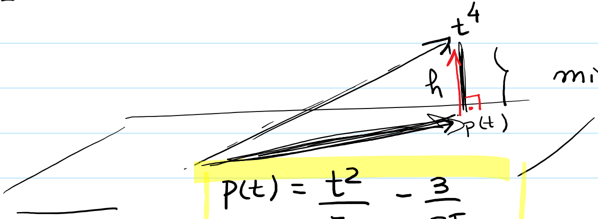
$\operatorname{proj}_{p_2} t^4 = \langle t^4, p_2\rangle p_2$ $\quad \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \underbrace{t^4. t}\, dt = 0$

$$\operatorname{proj}_{p_2} t^4 = \langle t^4, p_2 \rangle p_2 \qquad \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \underbrace{t^4 \cdot t}\, dt = 0$$

$$\operatorname{proj}_{p_3} t^4 = \langle t^4, p_3 \rangle p_3 \qquad \sqrt{\frac{45}{8}} \int_{-1}^{1} \left(t^6 - \frac{1}{3} t^4\right) dt = \dots = \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \frac{16}{105}$$

Då är $\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_2} t^4 = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot 1 + 0 \cdot p_2 + \sqrt{\frac{45}{8}} \cdot \frac{16}{105} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$

$$\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_2} t^4 = \frac{1}{5} + \frac{6}{7}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{7} t^2 - \frac{3}{35}$$



minimal avstånd $= \|h\|$

$$\boxed{h = t^4 - p(t)}$$

$$\boxed{p(t) = \frac{t^2}{7} - \frac{3}{35}}$$