L7_V4_20april

den 20 april 2021 13:49

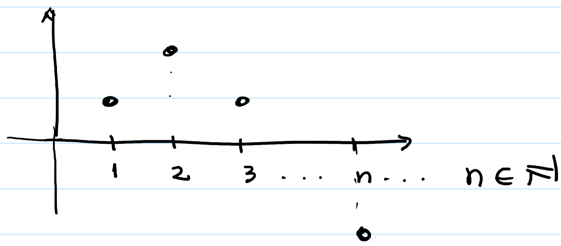
Bok: ELW - Matematik Analys med tillämpningar

§17. Talföljd.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

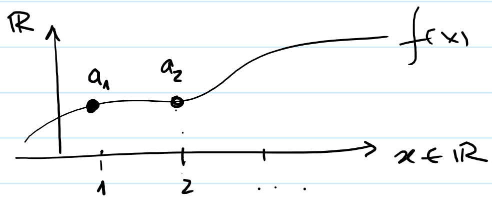
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \to a(n) = a_n$

$(a_n) = (a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots)$



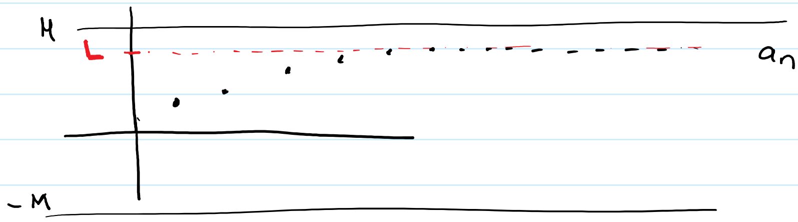
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \Longrightarrow \qquad a_n = f(n)$

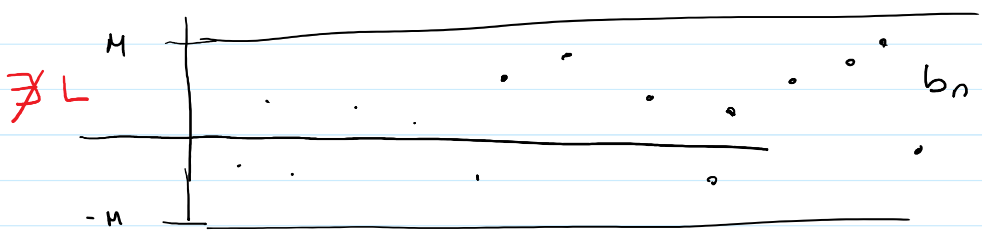
$\quad x \to f(x)$



- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ begränsad (Bounded)

  $\exists\ M\in\mathbb{R}$ så att $\quad |a_n| \leq M, \ \forall n\in\mathbb{N}.$





- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ är <u>Monoton</u> när:

  i) $a_n < a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\qquad$ strängt växande

  ii) $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\qquad$ växande

(iii) $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ strängt avtagande

(iv) $a \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avtangde.

Sats. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\underbrace{\text{Monoton}}_{(i)}$ + $\underbrace{\text{begränsad}}_{(ii)}$ $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergent

Bevis: Enligt Hipotes

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton $\therefore$ växande $\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$ $\leftarrow$

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \dots$

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ begränsad $|a_n| \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$

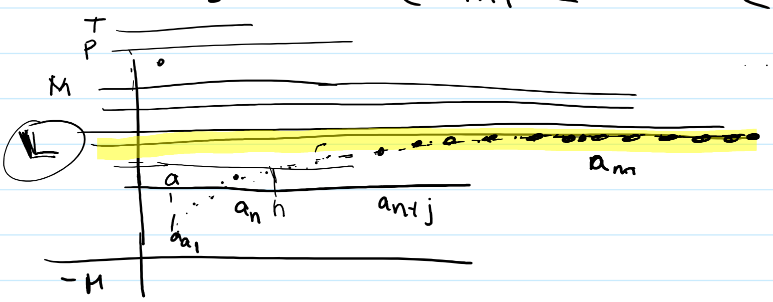
$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1} \leq \dots < \underline{M}.$$

Då $\mathbb{R}$ är Komplet (alla begransad delmäng av $\mathbb{R}$ har en suppremum.

(Fullständighet: om $S \subseteq \mathbb{R}$, S begränsad delmängd uppåt
Så existerar en minsta övre begränsning L = supremum av S
$L = \sup S$.

Då fins det $L = \sup S$, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n \dots\}$

$$a_1 \leq a_2 \dots \leq a_{n+1} \leq \dots \leq \boxed{L} \leq M < P < T$$



Det finns $L \in \mathbb{R}$

$L \leq M$

$L = \sup.$

Vi vill visa att L = gränsvärde av $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L}$$

$L - \varepsilon$ är inte sup

given $\varepsilon > 0 \Rightarrow L - \varepsilon < L \quad \Longrightarrow$

given $\varepsilon > 0 \Rightarrow L-\varepsilon < L$

Det fins $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $L-\varepsilon < a_{n_0} < L$

Därför $L-\varepsilon$ är inte suppremum.

Men $\{a_n\}$ är växande (monoton)

$\forall n \quad a_n \le a_{n+1}$

$$a_{n_0} \le a_{n_0+1} \le \dots$$

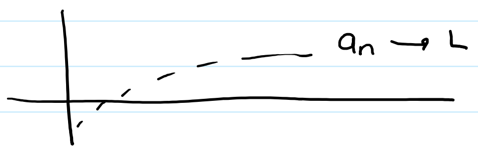
$\forall n > n_0 \Rightarrow \quad a_{n_0} \le a_n \le a_{n+1}$

$$L-\varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le L < L+\varepsilon$$

$$\boxed{\text{Då} \quad n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon}$$

D.v.s att $\lim_{n\to\infty} a_n = L.$ $\square$

Consequence. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ är begränsad.



$|a_n - L| < \varepsilon$

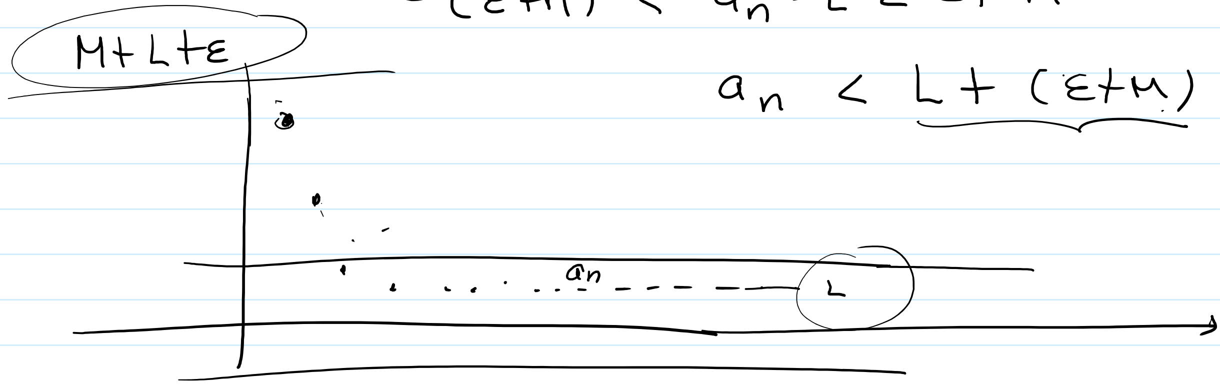
$\forall n > n_0 \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$

$M = \max\{a_1, \dots a_n\}$

$$|a_n - L| < \varepsilon + M$$

$$-(\varepsilon+M) < a_n - L < \varepsilon + M$$

$$a_n < \underbrace{L + (\varepsilon+M)}$$



Operationer med $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \qquad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot a$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = a + b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$

4) $b \neq 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{a}{b}$

Sats: Squeeze Theorem

$$\left.\begin{cases} a_n \le b_n \le c_n, & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \to a \\ c_n \to a \end{cases}\right. \Longrightarrow \quad b_n \to a$$

$$\begin{array}{ccccc} & a_n & \le \; b_n \; \le & c_n & \\ n\to\infty & \downarrow & & \downarrow & n\to\infty \\ & a & \downarrow & a & \\ & & a & & \end{array}$$

Sats: $\{a_n\}_n$ $\quad a_n \to 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\{b_n\}_n$ $\quad |b_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

Bevis:

- $\{a_n\}_n$ $\quad a_n \to 0$ $\quad$ enligt definition. given $\varepsilon > 0$, det fins $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$
  $n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$

[given $\varepsilon_1 > 0$? kan vi hitta n_0 så att
$n > n_0 \Longrightarrow |a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$.]

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon_1$$

om $M > 1$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \frac{1}{M} < \varepsilon$ $\quad$ Det fins $n > n_0 \geq N_\varepsilon$

$$|a_n \cdot b_n| \leq |a_n| \cdot M < \varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \frac{1}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} = \varepsilon$$

Det fins $n_0 > N_\varepsilon > 0$ så att

$$n > n_0 \Longrightarrow |a_n \cdot b_n| \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} = \varepsilon$$

$\square$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0}$$

Satsen. Om $\left[\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) \end{array}\right.$ kontinuerlig

$(x_n)_n$ $\quad x_n \to x$ Konvergent

Då $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x)}$$

Ex Hur viktig är Hipotes att f är kontinuerlig.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

$$(x_n) = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

$$? \quad f(x_n) = ? \quad \not\longrightarrow f(0) \;?$$

$$(x_n) = \frac{(-1)^n}{n} \begin{cases} \frac{1}{2k} & n = 2k \\ \frac{-1}{2k+1} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(x_n) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{2k}\right) = 2k \to +\infty & \text{när } k \to \infty \\ f\left(\frac{-1}{2k+1}\right) = -(2k+1) \to -\infty & \text{när } k \to \infty \end{cases}$$

Då $\nexists \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (f var ej kontinuerlig)

Då kan satsen inte vara sant.

$\square$