

Uppgifter:  $\left\{ \begin{array}{ll} 1803 a, b & \text{sidan } 58 \\ 1816 a & \text{sidan } 65 \\ 1822 & \text{sidan } 69 \\ 1827 c & \text{sidan } 75 \\ 1829 a, c & \text{sidan } 75 \end{array} \right.$

1803 a, b

Antag att  $\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0}$  Bevisa att  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

Lösning:

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^2 (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - a_3) = a_1 - a_3$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^3 (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - a_4) = a_1 - a_4$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \dots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) \stackrel{*}{=} a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

\* hypotes

$$= a_1 - 0 = a_1$$

Da  $S = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 \quad \square$

b)  $S = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{4k^2 - 1} \right)}_{\oplus} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$

Tips:  $\boxed{a_k = \frac{1}{4k-2}} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \checkmark$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4(k+1)-2} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+4-2} =$$

$$= \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4k+2 - (4k-2)}{(4k-2)(4k+2)}$$

$$= \frac{4}{16k^2 - 4} = \frac{4}{4(4k^2 - 1)} = \frac{1}{4k^2 - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

Enligt (a)

||

$$a_1 = \frac{1}{4(1)^2 - 1} = \frac{1}{2} //$$

1816 a) Visa att Talföljd konvergerar / gränsvärde.

0)  $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$

Lösning:

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$\boxed{2 < 2 + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} \quad a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$$

$$a_3 = \sqrt{2+a_2}$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = a_3$$

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

Vi ska använda induktion att bevisa att:  $a_n < a_{n+1}$

Induktionshypotes:

$$a_{n-1} < a_n$$

$$\boxed{a_{n-1} < a_n \Rightarrow a_n < a_{n+1}}$$

$$\boxed{a_{n-1} < a_n} \Rightarrow a_{n-1} < a_n < a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{n-1} < a_n} \Rightarrow a_{n-1} + 2 < a_n + 2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 2} < \sqrt{a_n + 2}$$

$$\underbrace{\sqrt{2 + a_{n-1}}}_{a_n} < \underbrace{\sqrt{2 + a_n}}_{a_{n+1}}$$

$$a_n < a_{n+1}$$

Enligt Induktion  $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Då  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  monoton (växande talföljd)

Nu visar vi att  $\{a_n\}$  är begränsad.

$$0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$\sqrt{2} + 2 < 2 + 2$$

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2$$

$$a_2 < 2$$

$$a_3 = \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Med induktionsargument

$$\text{Antag att } \begin{cases} \boxed{a_n < 2} \\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \end{cases}$$

Vill visa att  $a_{n+1} < 2$

$$\text{Då: } a_n < 2$$

$$2 + a_n < 2 + 2$$

$$\underbrace{\sqrt{2 + a_n}}_{a_{n+1}} < \sqrt{4} = 2$$

$$a_{n+1} < 2$$

Då  $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Däremot  $\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ är begränsad: } \underline{0 < a_n < 2} \\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ växande} \equiv \text{monoton:} \end{array} \right.$

$\Rightarrow$   
enligt sats

$\left\{ a_n \right\}_{n=1}^{\infty}$  är konvergent.  $(**)$

III: Vi ska räkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \leftarrow 2 + a_{n-1} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + a_{n-1})} \quad (**)$$

$\downarrow$

$\{a_n\}$  är konvergen  
och  $\sqrt{\cdot}$  är kontinuerligt funktion.

$$a = \sqrt{2 + a}$$

$$a^2 = 2 + a \Rightarrow$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ \text{eller} \\ a = -1 \end{array} \right.$$

$$0 < a_n < 2$$

$$\text{Då } \left[ a_n \rightarrow 2 \right]_{n \rightarrow \infty} \quad \square$$

1822 (sidan 69)

Bevisa att  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^p}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvergerar för } p > 1 \\ \text{divergerar för } 0 < p < 1. \end{array} \right.$

Lösning:

(.) Sats 18.6  $f \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergent}$$

(..) Sats 18.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} p \leq 1 & \text{divergent} \\ p > 1 & \text{konvergent.} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{k(\ln(k))^p} \leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^p} \quad \begin{matrix} x \geq 2 \\ x \in [2, +\infty) \end{matrix}$$

Nu analyserar vi  $\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^p} dx$

variabelbyte:  $\begin{cases} x = e^t \rightarrow \ln x = t \\ dx = e^t dt \end{cases}$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{e^t (t)^p} e^t dt = \int_2^{\infty} \frac{1}{t^p} dt \leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

$p > 1 \Rightarrow \text{konvergent}$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t^p} dt = \left[ \frac{t^{-p+1}}{-p+1} \right]_2^{\infty}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{t^{-p+1}}{-p+1} \right]_2^R = \frac{R^{-p+1}}{-p+1} - \frac{2^{-p+1}}{-p+1} = \frac{2^{1-p}}{p-1}$$

$p > 1$   
 $R \rightarrow \infty$

Dä enligt 18.6 har vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p} \text{ konv.}$$

ock gräns värde =  $\frac{2^{1-p}}{p-1}$ ,  $p > 1$ .

□

Sats 18.8 Jämförelsekriteriet.

Antag  $0 \leq a_k \leq b_k \forall k$

$\sum b_k$  konvergent  $\Rightarrow \sum a_k$  konvergent

$\sum a_k$  divergent  $\Rightarrow \sum b_k$  divergent

$$\sum a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum b_k \text{ divergent}$$

Sats 18.9 Jämförelsekriteriet på Grönwårdesform

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{a_k}{b_k} \right) = A > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum a_k \text{ d. } \sum b_k \text{ divergent} \\ \text{eller} \\ \sum a_k \text{ d. } \sum b_k \text{ konvergent} \end{cases}$$

Sats 18.11  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  positiv serie

$$A < 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ konvergent}$$

Kvotkriteriet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

$$A > 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ divergent.}$$

1827 c) sedan 75

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k^2}{4^k + 1}$$

$$a_k = \frac{3^k + k^2}{4^k + 1}$$

$$a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a_{k+1} = \frac{3^{k+1} + (k+1)^2}{4^{k+1} + 1}$$

Sats (18.11)  $a_{k+1} = \frac{3 \cdot 3^k + (k+1)^2}{4 \cdot 4^k + 1}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left( \frac{3^k (3 + \frac{(k+1)^2}{3^k})}{4^k (4 + \frac{1}{4^k})} \right) \cdot \left( \frac{4^k (1 + \frac{1}{4^k})}{3^k (1 + \frac{k^2}{3^k})} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4} < 1$$

Enligt Satsen 18.11  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergerar.

Obs: Vi kan också lösa uppgift med hjälp av

Sats: 18.9 Om  $\left[ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0 \right]$  Då  $\left[ \sum a_k \text{ d. } \sum b_k \text{ har samma Beteende} \right]$

Obs: Här behöver vi inte ha  $a_k \leq b_k \quad \forall k!!!$

$$a_k = \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} = \frac{3^k (1 + \frac{k^2}{3^k})}{4^k (1 + \frac{1}{4^k})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{4^k} = b_k$$

$$a_k = \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} = \frac{3^k (1 + \frac{k^2}{3^k})}{4^k (1 + \frac{1}{4^k})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{4^k} = b_k$$

$$3^k + k^2 < \underbrace{3^k + 3^k}_{2 \cdot 3^k} \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\boxed{b_k > a_k \quad \forall k}$$

Beskriv

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\cancel{3^k} (1 + \frac{k^2}{3^k})}{\cancel{4^k} (1 + \frac{1}{4^k})} \cdot \frac{4^k}{3^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1 = A > 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad |q| < 1 \quad q = \frac{3}{4}$$

det är konvergent.

Enligt 18.9

$$\left[ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0 \\ \& \sum b_k \text{ konverger} \end{array} \right] \Rightarrow \sum a_k \text{ konvergent.}$$

1829 (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ? konvergent/divergent?

$$a_k = \sqrt{k + \frac{1}{k}} - \sqrt{k}$$

Lösning:  $\left[ \begin{array}{l} ? \text{ kan vi hitta } b_k \text{ så att} \\ 0 \leq a_k \leq b_k \text{ \& } \sum b_k \text{ konvergent?} \\ \text{Om det är sant då enligt sats 18.8} \\ \sum a_k \text{ konvergent.} \end{array} \right]$

$$a_k = \left( \sqrt{k + \frac{1}{k}} - \sqrt{k} \right) \cdot \left( \sqrt{k + \frac{1}{k}} + \sqrt{k} \right) = \frac{1}{\left( \sqrt{k + \frac{1}{k}} + \sqrt{k} \right)}$$

$$a_k = \frac{\cancel{\left( k + \frac{1}{k} \right)} - \cancel{k}}{\sqrt{k + \frac{1}{k}} + \sqrt{k}} = \frac{1}{k \left( \sqrt{k + \frac{1}{k}} + \sqrt{k} \right)}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \sqrt{k + \frac{1}{k}} &= \sqrt{k(1 + \frac{1}{k})} = \sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{k(\sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{1}{k}} + \sqrt{k})} = \frac{1}{k\sqrt{k}(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1)} \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{k^{3/2}} \quad 0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\cancel{k\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1}}{\cancel{\frac{1}{k\sqrt{k}}}} = \frac{1}{(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} + 1)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{2} = A < 1$$

$\sum a_k$  &  $\sum b_k$  har samma beteende.

men  $\sum b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$  är konvergent

så är  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  också konvergent  $\square$

1829 c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

Tips:  $\begin{cases} \text{Taylorserie av } \arctan(x) \\ \text{Taylorserie av } \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ \downarrow \\ \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \end{cases}$

Lösning: 
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$
  

$$= x + O(x^3)$$



$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$$

$$\downarrow$$

$$a_k = \arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + O\left(\left(\frac{1}{k}\right)^3\right)$$

Nu tar vi  $b_k = \frac{1}{k}$

då  $\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)}{\frac{1}{k}} = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$\begin{matrix} 0 \\ \leftarrow \infty \end{matrix}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1 > 0 \quad \text{men} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$0 \leq b_k \leq a_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  divergent  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent

Då  $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$  är divergent.  $\square$