

SerierSats 18.8 (jämförelsekriteriet)

$a_k, b_k$  positiva talföljd  
 $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k$

da  $\begin{cases} \sum b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum a_k \text{ konvergent} \\ \sum a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum b_k \text{ divergent.} \end{cases}$

Sats 18.9 (jämförelsekriteriet på Gränsvärdesform)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0$$

da  $\begin{cases} \sum a_k \text{ & } \sum b_k \text{ konvergerar} \\ \text{eller} \\ \sum a_k \text{ & } \sum b_k \text{ divergerar} \end{cases}$

Uppgift 1827 sidan 75

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} \right)$$

$$a_k = \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} b_k = \frac{3^k}{4^k}$$

~~$$a_k \leq b_k$$~~

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{3^k + k^2}{4^k + 1} \right) \frac{4^k}{3^k} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3^k} (1 + \frac{k^2}{3^k})}{\cancel{4^k} (1 + \frac{1}{4^k})} \frac{4^k}{3^k} = 1 = \underline{\underline{A > 0}}$$

$$\sum b_k = \sum \frac{3^k}{4^k} = \sum \left( \frac{3}{4} \right)^k = \sum q^k \quad |q| < 1$$

konvergent

Enligt 18.9  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent.

---

1827. a)  $\sum_{k=1}^{\infty} |2k-1|$  konvergent?

1827: a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k-1}{k^2 \sqrt{k+1}} \right)$  konvergent?  
divergent?

$$a_k = \frac{2k-1}{k^2 \sqrt{k+1}} \leq \frac{2k}{k^2 \sqrt{k+1}} = \frac{2}{k \sqrt{k+1}} < \frac{2}{k \sqrt{k}} = \frac{2}{k^{3/2}} = 2 \cdot \frac{1}{k^{3/2}} = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{k^{3/2}}}_{b_k}$$

$k < k+1$   
 $\sqrt{k} < \sqrt{k+1}$   
 $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\forall k$

$b_k = 2 \cdot \frac{1}{k^{3/2}}$   $\sum b_k$  konvergent

Enligt jämförelsek.  $\sum a_k$  också konvergent  $\square$

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \sin 3k}{k \sqrt{k}}$

$a_k = \frac{1 + \sin 3k}{k \sqrt{k}}$

$|\sin 3k| \leq 1 \Rightarrow$

$-1 \leq \sin 3k \leq 1 \Rightarrow$

$1-1 \leq 1 + \sin 3k \leq 1+1 \Rightarrow$

$0 < 1 + \sin 3k \leq 2$

$a_k \leq \frac{2}{k \sqrt{k}} = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Enligt 18.8 (7. k) är  $\sum a_k$  konvergent.

Sats 18.11

Antag  $\left\{ \begin{array}{l} \sum a_k \text{ positiv serie} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = A \end{array} \right.$

Då  $A < 1 \Rightarrow \sum a_k$  konvergent

$A > 1 \Rightarrow \sum a_k$  divergent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

$A > 1 \Rightarrow \sum a_k$  divergent

$$\boxed{A = 1} \quad ???$$

1827 d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$$

$$a_k = \frac{10^k}{k!}$$

$$a_{k+1} = \frac{10^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{10^k \cdot 10}{(k+1) \cdot k!}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\cancel{10^k} \cdot 10}{(k+1) \cancel{k!}} \cdot \frac{k!}{\cancel{10^k}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)} = 0$$

$$0 = A < 1$$

Då enligt satsen 19.11 är  $\sum a_k$  konvergent.  $\square$

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^k a_k}_{\text{inte längre positiva tal.}}$$

Sats 18.12

Om serien  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  är konvergent

Så är också  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent.

Bevis:

$$\underbrace{a_k}_{=} = a_k + 0 = \underbrace{(a_k + |a_k|)}_{\geq 0} - \underbrace{(|a_k|)}_{\geq 0}$$

Hypotes:  $\sum |a_k|$  är konvergent

$$* \quad 0 \leq \underbrace{a_k + |a_k|}_{\parallel} \leq |a_k| + |a_k| = \underbrace{2|a_k|}$$

$$* \quad \underbrace{a_k + |a_k|}_{= 2|a_k|} \geq |a_k| + |a_k| = \underbrace{2|a_k|}$$

$$0 \leq c_k \leq \underbrace{2|a_k|}$$

$$\sum c_k \text{ \& } 2\sum |a_k| \text{ konvergent}$$

är konvergent

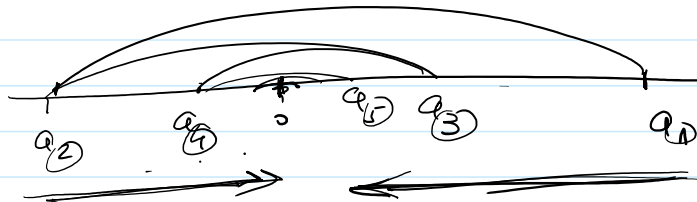
Absolut konvergent  $\times$  Betingat konvergent.

- Om  $\sum |a_k|$  konv da  $\sum a_k$  absolut konvergent.
- $\sum |a_k|$  divergent &  $\sum a_k$  konvergent  $\oplus$   
da kallas  $\sum a_k$  betingat konvergent

Sats 18.13 Leibnitz konvergenstkriterium.

Om  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  är  $\left\{ \begin{array}{l} \text{avtagande} \quad (a_k \geq a_{k+1} \quad \forall k) \\ \text{positiv} \\ \text{med gränsvärde} = 0 \end{array} \right.$

Så är  $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k}_{\text{Leibnitz}} a_k$  konvergent.



Uppgift

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2}$$

$$a_k = \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2}$$

$$\rightarrow |a_k| = \frac{|(-1)^k \cos kx|}{k^2}$$

$$|a_k| \leq b_k = \frac{1}{k^2}$$



$\sum b_k$  konvergent

Då enligt J.k (sats 18.8) är  $\sum |a_k|$  konvergent

Då enligt sats 18.12 är  $\sum a_k$  konvergent.