Ö10_V6_04maj2021

den 4 maj 2021 15:01

Övningar: $\begin{cases} 1833 / 1835a / 1836a / 1836b / 1837c \\ 1902c / 1902f \end{cases}$ sidor $\begin{cases} 79, 80 \\ 91 \end{cases}$

1833) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k\sqrt{k}}$ är konvergent för varje $x \in \mathbb{R}$.

Lösning

Sats 18.12: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ⊛

Absolut konvergens

$a_k = \frac{\sin(kx)}{k\sqrt{k}}$ inte längre en positiv serie

⊛ för alla $x \in \mathbb{R}$

$$|a_k| = \left|\frac{\sin(kx)}{k\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{k\sqrt{k}} |\sin(kx)| < \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1+1/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}}_{\text{konvergent}}$$

konvergerar när $p = 3/2 > 1$

Enligt jämförelsekriterier $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent

Nu med hjälp av sats 18.2

har vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är också konvergent. för alla $x \in \mathbb{R}$.

1835) Konv? eller Divergent?

sats 18.12

$\sum |a_k|$ konv $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

sats 18.13 (Leibniz kriterium)

$\{a_k\}$ AVTAGANDE + $a_k \to 0$, $k \to \infty$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^{4/3}}$

$a_k = (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^{4/3}}$

$|a_k| = \frac{\ln(k)}{k^{4/3}}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k)}{k^{4/3}} \to 0$ ✓

$k > 1$, $s > 0$, $\underline{0 < s\ln k = \ln(k^s) \le k^s - 1 < k^s}$

$$\boxed{0 < s\ln(k) < k^s} \Rightarrow \frac{0}{k^{4/3}} < \frac{\ln(k)}{k^{4/3}} < \frac{1}{s}\frac{k^s}{k^{4/3}} = \frac{1}{s}\frac{1}{k^{4/3-s}}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{4/3-s}} = 0}$$ om $\frac{4}{3} - s > 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - 1 > s \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3} > s}$

Då väljar vi $0 < s < \frac{1}{3}$ $\Longrightarrow$ $\sum |a_k|$ konvergerar

jämförelse kriterium

Då väljar vi $0 < s < \frac{1}{3}$ $\xrightarrow[\text{jämförelse kriterium}]{}$ $\sum |a_k|$ konvergerar

Enligt Satsen 18.12 är $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

$\square$

1836 a) Konvergent eller divergent?

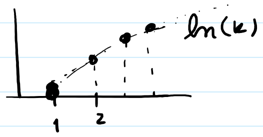
a) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln(k)}}_{a_k}$

Sats 18.12
$\sum |a_k|$ konv $\Rightarrow$ $\sum a_k$ konv

Sats 18:13
$\left.\begin{array}{l}\{a_k\} \text{ avtagande} \\ a_k \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverg.

Lösning.

$a_k = \frac{1}{\ln(k)}$



1^{st}: $\ln(k)$, $k \geq 2$ $\qquad$ $0 < \ln(k)$

$\ln(k)$ är växande för $k \geq 2$ $\longrightarrow$ $\ln(k) < \ln(k+1)$

$\lim_{k \to \infty} \ln(k) = +\infty$ $\qquad$ $\boxed{0 < \ln(k) < \ln(k+1)}$ (*)

$\frac{1}{\ln(k)} > \frac{1}{\ln(k+1)}$ ✓

$a_k = \frac{1}{\ln(k)}$ är AVTAGANDE

$\ln(k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty \Longrightarrow a_k = \frac{1}{\ln(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Enligt sats 18.13 (Leibniz kriterium)
har vi att $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k)}$ är Konvergent

$\square$

1836 b) Konv? eller divergent?

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k}$

Sats 18:12
$\sum |a_k|$ konv $\Rightarrow$ $\sum (-1)^k a_k$ konv

Sats 18:13 (Leibniz k)
$\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \text{ avtagande} \\ + \\ a_k \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sum (-1)^k a_k$ konvergent

Lösning:

$a_k = \frac{k+1}{2k}$, $a_k > 0$

$\sum^{\infty} b_k$ konvergent $\Rightarrow$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\qquad$ $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S$

delsumman är en konvergent talföljd.

$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} + \frac{1}{k}\right] =$

$= \lim \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{2} \neq 0$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\qquad$ $b_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\boxed{a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1/2 \neq 0}$$

Då $\sum a_k$ divergent

$(-1)^k a_k \not\to 0$ $\quad \begin{cases} 1/2; & k = 2n \\ -1/2; & k = 2n+1 \end{cases}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad b_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\left[\begin{array}{l} S_n \to S \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{b_k \to 0}$$

$p \Longrightarrow q$

$\sim p \Longleftarrow \sim q$

$S_n \not\to S$ $\qquad b_k \not\to 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

Tankar

$\sum (-1)^k a_k$ inte konvergerar $\therefore$ då är $\sum(-1)^k a_k$ Divergent.

1837c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n . n}}_{a_n}$

Sats 18.12

1) $\sum |a_k|$ konv $\Rightarrow \sum a_k$ konv

2) Sats 18.9 Jämförelsekrit. (positiva serier)

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = A > 0 \ \& \\ \sum b_k \text{ är konvergent} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\sum a_k$ är också konvergent

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n n}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2} + 2} > 0 \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{3} - 3} < 0$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{4} + 4} > 0 \qquad a_5 = \frac{1}{\sqrt{5} - 5} < 0$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n} + (2n)} > 0 \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - (2n+1)} < 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_{2n} + a_{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2n} + 2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1} - (2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1} - (2n+1) + \sqrt{2n} + 2n}{(\sqrt{2n} + 2n)(\sqrt{2n+1} - (2n+1))} =$$

$$c_n = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n} - 1 \ {>0}}{\left(\underbrace{\sqrt{2n}\sqrt{2n+1}}_{O(n)} - \underbrace{\sqrt{2n}(2n+1)}_{O(n^{1+1/2})} + \underbrace{2n\sqrt{2n+1}}_{O(n^{1+1/2})} - \underbrace{2n(2n+1)}_{O(n^2)}\right)}$$

- $c_n < 0 \quad \forall n > N_0 \quad$ (när $n \to \infty$) $\Rightarrow$

$-2n(2n+1)$

$-4n^2 - 2n$

$-n^2\left(+4 + \frac{2}{n}\right)$

när $n \to \infty \quad (-c_n) > 0$

$$-c_n = \frac{(\sqrt{n}\sqrt{(2+\frac{1}{n})} + \sqrt{n}\sqrt{2} - 1)}{+n^2\left(4 + \frac{2}{n} - \frac{O(n)}{n^2} + \frac{O(n^{1+1/2})}{n^2} - \frac{O(n^{1+1/2})}{n^2}\right)}$$

$$n \qquad \frac{}{n^2} \qquad \frac{}{n^2} \qquad \frac{}{n^2}\Big)$$

$$(-c_n) = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+1/n} + \sqrt{2} - 1/\sqrt{n}\right)}{n^2\left(4 + \frac{2}{n} - O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2-1-1/2}}\right) - O\left(\frac{1}{n^{2-1-1/2}}\right)\right)}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \sum b_k \text{ konvergent}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-c_n)}{b_n} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} + \sqrt{2} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{\cancel{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}\left(4 + \cancel{O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{A} > 0$$

$\dfrac{(-c_n)}{(b_n)} \to 0$ $\qquad$ $(-c_n)$ positiva, (b_n) positiva $\qquad$ och $\sum b_n$ konvergent

Då enligt Jämförelse kriterium $\sum(-c_n)$ är konvergent $\Rightarrow$

$-\left(\sum c_n\right)$ är konvergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=2} a_n$ är konvergent

$\blacksquare$

1902 c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \cdot x^k$ $\qquad$ potensserier

Bestäm Konvergens intervall

Tankar

sats 19.4 Rotformel för konvergens radien

Om $\sqrt[k]{|a_k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} H$ så har

$\sum a_k z^k$ konvergens radien

$R = \dfrac{1}{H}$

Lösning

$$a_k = \left(\underbrace{1+\frac{1}{k}}\right)^{k^2} \qquad |a_k| = a_k > 0$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{a_k} = (a_k)^{1/k}$$

$$(a_k)^{1/k} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right)^{1/k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \underset{(*)}{=} e = H}$$ satsen 19.4

Taylor

$\ln(1+t) =$

$(*)$ Bevis: $\qquad \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$

$$k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{\text{Taylor}}{=} k\left[\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e^{\lim\left(1+\cancel{O(1/k)}^{\,0}\right)} =$$

exp är kontinuerligt funktion

$$= e^1 \qquad \square$$

Enligt Satsen 19.4 $\quad H = e \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{H} = \frac{1}{e}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k \qquad \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) = I$$

? Fråga: Vad händer när $x = \frac{1}{e}$ eller $x = -\frac{1}{e}$?

$I = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ eller $I = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$

eller $I = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$?

eller $I = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$?

Nu: $\quad x = 1/e$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\left(\frac{1}{e}\right)^k$$

$x = -1/e$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{1}{e}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\left(-\frac{1}{e}\right)^k$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\left(\frac{1}{e}\right)^k \cdot (-1)^k}$$

Sats 18.12

$\sum |b_k|$ konv $\Rightarrow \sum b_k$ konv

$$|b_k| = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{e^k}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}} \cdot e^{-k} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}} \cdot e^{-k} =$$

$$e^{k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} \cdot e^{-k}.$$

Med hjälp av Taylor Polynom. (2:a grad)

$$k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - k \underset{\text{Taylor}}{=} k^2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right] - k$$

$$= \left[\cancel{k} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] - \cancel{k}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2} + O(1/k) \right]$$

$$b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

$$\boxed{\sum b_k \text{ div} \Leftarrow b_k \not\to 0}$$

Då $x = \frac{1}{e}$ och $x = -\frac{1}{e}$

inte hör till konvergens intervalen.

Så $\underline{I = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)}$ öppnet <u>intervall</u>

$\square$.