

- Mål
- Intuition om Punktviss konvergens & Likformig konvergens
 - Uppgifter 1805, 1810, 1811, 1823, 1829 b, c, d

§ 19.5

Def Punktviss konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergent f\"or varje } x \in I \text{ fixt} \quad \Rightarrow \quad f_n \rightarrow s_{\text{punktviss}} \text{ i } I$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x), \quad x \text{ fixt.} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \rightarrow s(x) \quad x \text{ fixt}; x \in I.$$

Sidan 108

Def: Likformig konvergens

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot f på m ngden M

om $\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} > 0, N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ s  att} \\ n > N_{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in M. \end{array} \right.$

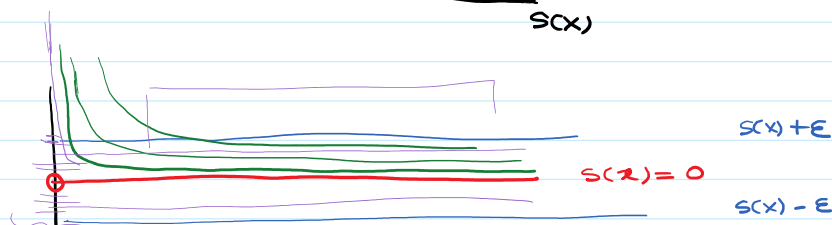
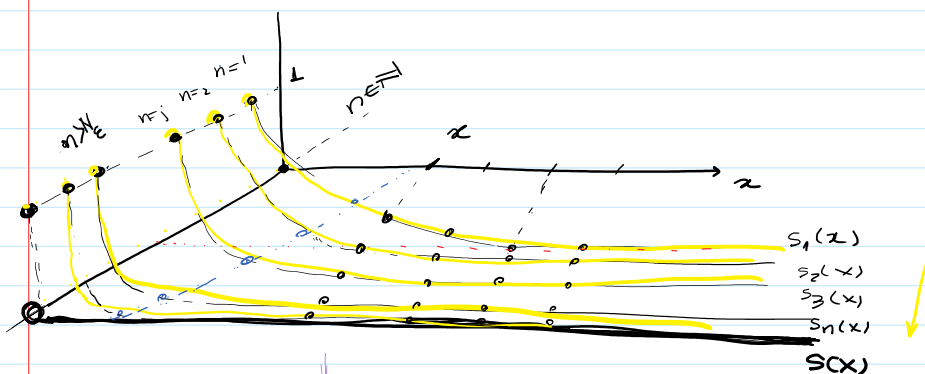
$$d(f_n, f) = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N_{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in M.$$

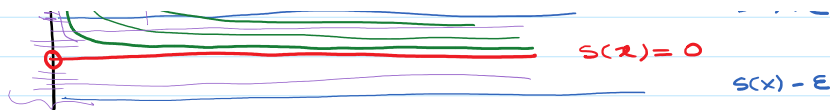
Ex 11. $s_n(x) = e^{-nx^2}$ kontinuerliga funktioner $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx^2} = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Medan $s_n(0) = e^{-n \cdot 0^2} = e^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Då $s_n(0) = 1 \rightarrow 1$
 $n \rightarrow \infty$





$M_x \subseteq (0, K)$ där kan $s_n \rightarrow s$ likformigt.

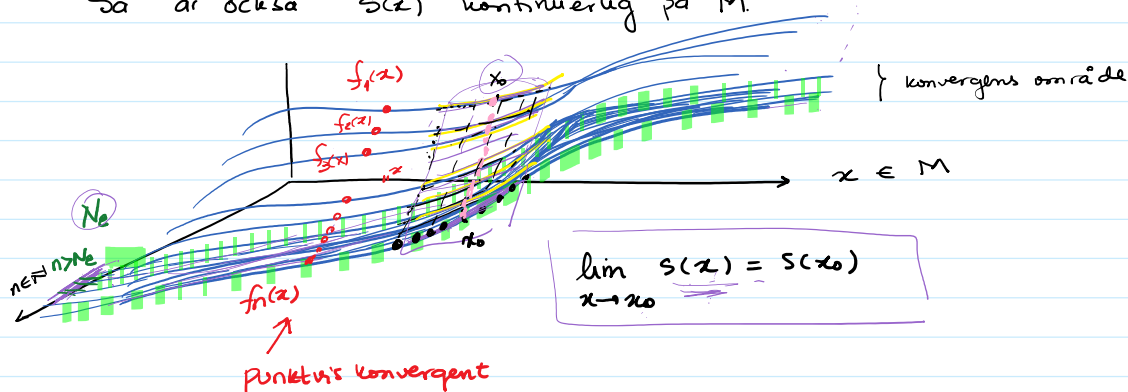
men om $0 \in M_x$, då kan konvergens inte vara likformigt

Sats 19.8

Om $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt mot $s(x)$ på M

och $u_k(x)$ är kontinuerliga i M .

Så är också $s(x)$ kontinuerlig på M .



$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = s(x_0)$$

$$|s(x) - s(x_0)| = |s(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - s(x_0)| \leq$$

$$|s(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - s(x_0)|$$

likformigt

kontinuerliga
 $\forall n$

punktvis

$$< \frac{\epsilon}{3}$$

$$< \frac{\epsilon}{3}$$

$$< \frac{\epsilon}{3}$$

$$< \epsilon$$

om $n > N_\epsilon$ &

$$|x - x_0| < \delta$$

eftersom det är likformigt.

sidan 59 Uppgift 1805

Betrakta den Harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

a) Beräkna delsummorna $S_1, S_2, \dots$

b) Bevisa att $S_2 \geq 1 + \frac{n}{2}$

c) Bevisa med (b) att serien är divergent.

Lösning. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Lösning. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

a) $S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_3 = S_2 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} > 2$

$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^k}$

$n=1 \Rightarrow S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$n=2 \Rightarrow S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2$

$n=3 \Rightarrow S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

Induktions Hypotes:

$S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$

Vi vill visa då att

$S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2^{n+1}} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{2}$

$n+1 \rightarrow S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^k} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{S_{2^n}} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}}_{\frac{1}{2^{n+1}}} = \textcircled{S_{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}}$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$
 $2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots, 2^{2^{n+1}} = 2 \cdot 2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^{2^{n+1}}$
 2^n element

$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \right)$

$S_{2^{n+1}} > S_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}$

2^n termer

$$S_{2^{n+1}} > S_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

Men enligt våra Induktions hypotes, $S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$

Då

$$S_{2^{n+1}} > 1 + n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + (n+1) \frac{1}{2}$$

Däremot (enligt Peanos Axiomer)

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Nu har vi $0 < 1 + \frac{n}{2} < S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

När $n \rightarrow \infty$ $1 + \frac{n}{2} \rightarrow \infty$ $\therefore$ divergerar

Men enligt jämförelsekriteriet,

är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ också divergent.

□

1810 sidan 60

Bvisa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ med $m > 1$ är också konvergent

and $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$

A

B

$A \Leftrightarrow B$ betyder $A \Rightarrow B$
och
 $B \Rightarrow A$

$\Rightarrow$ $A \Rightarrow B$

Antag $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Enligt definition

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, finns det $S \in \mathbb{R}$ så att

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \quad \therefore \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Däremot

$$\forall n > m \quad S_n = a_1 + \dots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^n a_k$$

Däremot

$$\forall n > m \quad S_n = a_1 + \dots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^n a_k$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n > m}} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k \Rightarrow$$

$$S = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

Då $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ är också konvergent och

$$\text{ motsvarande gränsvärde är } \boxed{\sum_{k=m}^{\infty} a_k = S - (a_1 + \dots + a_{m-1})} \quad \square$$

Obs: Vi kunde tänka också att

$$S_n^m = \sum_{k=m}^n a_k < \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$\{S_n^m\}$ är en delföljd av $\{S_n\}$, och $\{S_n\}$ konvergent talföljd.

Då måste S_n^m också vara konvergent.

$\Rightarrow B \Rightarrow A$.

Antag nu $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent.

$$\text{Då finns det } T = \sum_{k=m}^{\infty} a_k. \quad \oplus$$

Men då kan man summera vad som helst reella tal till båda leden av $\oplus$

$$T + a_{m-1} = \sum_{k=m}^{\infty} a_k + a_{m-1}$$

$$T + a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_1 = \sum_{k=m}^{\infty} a_k + (a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Då är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ också konvergent med gränsvärde $T + (a_{m-1} + \dots + a_1)$

$$\text{Då gäller att } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1}) + T$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (a_1 + \dots + a_{m-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

1811 Serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta och har summorna

A och B respektivt. Bevisa att $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = cA$ och

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B$$

Bewis. Antag $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ två konvergenta serier.

Antag $c \neq 0$.

Då definierar vi

$$Q_1 = c a_1$$

$$Q_2 = c a_1 + c a_2 = c(a_1 + a_2)$$

$$Q_3 = c a_1 + c a_2 + c a_3 = c(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\vdots$$
$$Q_n = \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\vdots$$
$$\text{Då } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n a_k$$

Her $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent med gränsvärde A

$$\text{då har vi att } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = A$$

då

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = c \cdot A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \cdot A \quad \square$$

Nu antag

$$T_1 = a_1 + b_1$$

$$T_2 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

Då kan vi räkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$$

Igen enligt hypotes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$

Igen enligt hypotes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ $\oplus$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = A+B$$

$$\overset{||}{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)}$$

□

Däremot är $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent med
gränsvärde $(A+B)$

1811b: Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ också divergent.
med $c \neq 0$

Lösning: Att bevisa det ska vi använda den logiskt ekvivalens:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) ; \text{ d.v.s}$$

$$\text{Om} \left[\sum_{k=1}^{\infty} c a_k \text{ konvergent} \right] \text{ då } \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \right]$$

$c \neq 0$

Beweis:

$$c \neq 0.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R} \text{ så att}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = S \text{ och } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c a_k$$

Men

$$S_n = \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \sum_{k=1}^n a_k = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow$$

$\overset{||}{S}$

$$\text{Eftersom } c \neq 0, \frac{S}{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

då är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ också konvergent.

□

1811c) Antag att en av serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent och den andra är divergent.

Bervisa att $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ är divergent.

Beris: Utan att förlora generalitet väljar vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent

$$\text{Då } S_n = \sum_{k=1}^n a_k + b_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = S_n^a + S_n^b$$

$$\text{Och } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^a + S_n^b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b$$

eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a$
Men $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är Divergent. Då finns det inte $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b$

Men då kan inte finnas $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Det betyder att $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ är divergent. $\square$

1823 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2}$ $a > 0$, Bervisa att serien är konvergent
och $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2} < \frac{\pi}{2}$

Lösning.

$$\frac{a^2 > 0}{k^2 > 0} \Rightarrow \frac{a^2 + k^2 > 0 + k^2}{\Rightarrow \frac{1}{a^2 + k^2} < \frac{1}{k^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(ii) (i)

Enligt Jämförelsekriteriet konvergens av (i) implicerar konvergens av (ii)

Då finns det $S \in \mathbb{R}$

Dä finns det $S \in \mathbb{R}$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a}{a^2 + k^2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Dä är även $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2}$ konvergent med gränsvärde $= S$.

II Summan: $= S = ?$

Antag $f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad \therefore f(k) = \frac{a}{a^2 + k^2}$
 $x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{N}$

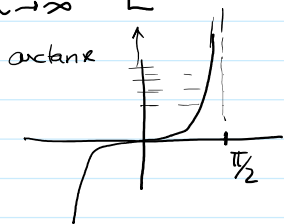
Kriteriet: Om $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergent Då $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent.

$$\int_1^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{a}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{a} dx$$

$$\frac{x}{a} = t \Rightarrow x = at \Rightarrow dx = a dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1 + t^2} dt = \left[\arctan x \right]_1^{\infty} \therefore$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(R) - \arctan(1)$$



$$\lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Dä} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(1)$$

$$\text{Dä} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2} \approx \int_1^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) < \frac{\pi}{2}$$

$S < \frac{\pi}{2}$

□

1829

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{k})$$

Konv? eller div?

$k=1$

Beweis: Enligt Taylor expansion

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \approx 1 - \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + O\left(\frac{\pi^4}{k^4}\right)$$

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \approx 1 - \left(1 - \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + O\left(\frac{\pi^4}{k^4}\right)\right)$$

$$\downarrow \approx \cancel{1-1} + \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

$$\text{Då } \sum_{k=1}^n (1 - \cos \frac{\pi}{k}) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{k}\right)^2 = \pi^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergent}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

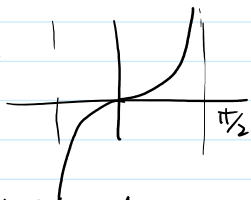
Då enligt jämförelsekriteriet är

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{\pi}{k} \text{ också konvergent.}$$

1829 c) $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$ visa att det är Divergent.

Lösning:

$\arctan x$



$\arctan x \rightarrow \pi/2$
 $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2)$$

$\hookrightarrow \arctan(x)$ är Concave $\forall x \in [0, \pi/2)$

Enligt Taylorsserien av $\arctan x$ har vi:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\underbrace{\arctan(x)}_a = \underbrace{x}_b - \underbrace{\frac{x^3}{3}}_c + O(x^5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b - c \\ a > a - c \\ a > b - c - c \\ a > b - 2c \end{array} \right.$$

$$\arctan(x) > x - 2 \cdot \frac{1}{3} x^3$$

$$\arctan\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$\arctan\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + a_k)$$

$\sum b_k$
divergen

$\sum a_k$
konvergent

$\sum b_k + a_k$ divergent

enligt uppgift 1811 c)

Dä är $\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$

Divergent.

1829 d) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{2}{k} \right)$ konv? eller Diver?

Lösning:

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{k+1-1+1}{k-1} = \frac{k-1+2}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}$$

$$\ln(1+x) = x - O(x^2) \quad (\text{sidan 85})$$

Dä $\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{k-1}\right) = \frac{2}{k-1} - O\left(\frac{1}{(k-1)^2}\right)$

Dä $\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{2}{k} \approx \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k} = \frac{2k - 2(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

Och $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{2}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)}}_{\text{konvergent}} < \infty$

Enligt jämförelsekriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{2}{k} \right) \text{ är konvergent.}$$

□