

Mål: ELW uppgifter 1919a / 1923a / 1924 / 1927

Def Punktviss konvergens

$$\text{välja } \underline{x \in M} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Def Likformig konvergens

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ så att

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \underline{\forall x \in M}$$

Sats 19.7 Gränsfunktionens kontinuitet.

$$\text{thp} \left[\begin{array}{l} f_n(x) \text{ kontinuerliga på } M, \forall n \\ f_n \rightarrow f \text{ likformigt på } M \end{array} \right] \Rightarrow \left[\underline{f \text{ kontinuerlig på } M} \right] \text{Tes}$$

$$\text{thp} \Rightarrow \text{Tes}$$

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

f inte kontinuerlig $\Rightarrow f_n \not\rightarrow f$ likformigt.
när f_n alla kontinuerliga.

Sats 19.8 Seriensummans kontinuitet.

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightarrow \underline{S(x)} \text{ likformigt på } M \\ u_k(x) \text{ kontinuerliga på } M \end{array} \right] \Rightarrow \left[\underline{S(x) \text{ kontinuerlig på } M} \right]$$

Sats 19.9 Weierstrass majorant sats

$$\left[\begin{array}{l} |u_k(x)| \leq \underline{a_k}, \forall x \in M \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ likformigt} \\ \text{konvergent på } M \end{array} \right]$$

ELW 1919a • Visa att funktionsföljd konvergerar punktviss i
 $M = \text{Intervall}$
• Bestäm gränsfunktion.

$$a) \left\{ e^{-nx} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0, +\infty) \quad M = \underline{[0, \infty)}$$

a) $\{ e^{-nx} \}_{n=1}^{\infty}, x \in [0, +\infty) \quad M = [0, \infty)$

Lösung.

$$f_n(x) = e^{-nx} = \frac{1}{e^{nx}} \quad n=1, 2, \dots \quad x \in [0, \infty)$$

$x=0 \Rightarrow$ $f_n(0) = e^{-n \cdot 0} = \frac{1}{e^{n \cdot 0}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

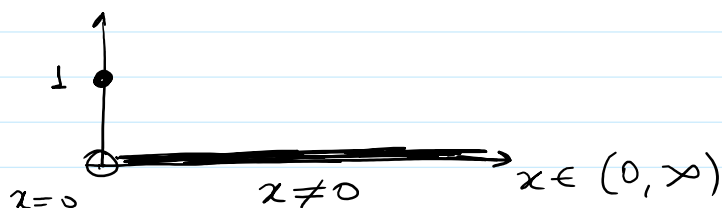
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$$

$x \neq 0 \Rightarrow$ $f_n(x) = e^{-nx} = \frac{1}{e^{nx}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx}} = 0 \quad \checkmark$$

$$\left[\begin{array}{ccc} nx > 0 & n \rightarrow \infty & e^{nx} \rightarrow \infty \quad \frac{1}{\infty} \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$f(x) =$ gränsfunktion.



$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}} \quad \text{kontinuerliga funktioner}$$

men $f(x)$ diskontinuerlig

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ bara punktvis.

Vi har inte likformig konvergens.

enligt sats 19.7.

ELVY 1923 a sidan 108

Visa att funktionsföljd konvergerar likformigt på $M =$ intervall

a) $\{ x^n \}_{n=1}^{\infty} \quad M = [0, b] \quad \underline{0 < b < 1}$

Lösning.

$$f_n(x) = x^n \quad x \in [0, b] \quad 0 < b < 1$$

$$x=0 \Rightarrow f_n(0) = 0^n = 0 \quad f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

$$0 < x < b \quad f_n(x) = x^n \leq f_n(b) = b^n \quad b^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{b < 1} 0$$

$$0 < f_n(x) < b^n$$

Sandwich
Theor.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$f(x) \equiv 0$
gränzfunktion.

Nu ska vi visa att konvergens är likformigt.

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| \leq b^n \quad \forall x \in M = [0, b] \quad 0 < b < 1$$

$$b^n = e^{\ln(b^n)} = e^{n \ln(b)}$$

$$(\ln(b) < 0) \quad 0 < b < 1$$

Låt $N_\varepsilon = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(b)}$ då gäller att

$$n \geq N_\varepsilon$$

$$n \cdot \ln(b) < N_\varepsilon \ln(b)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| < b^n = e^{n \ln(b)} < e^{N_\varepsilon \ln(b)} = e^{\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(b)} \cdot \ln(b)} = \varepsilon$$

Då har vi att $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ likformigt. $\square$

ELW 1924

a) $\left\{ x \left(\frac{x^n - 1}{x^{n+1}} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvís på $M = [0, \infty)$ mot f .
vilken f ?

b) Är konvergens likformig på $M = [0, \infty)$? $\leftarrow$

c) Är konvergens likformig på $M^* = [2, \infty)$?

Lösning:

a) $f_n(x) = x \frac{(x^n - 1)}{(x^n + 1)}$ $M = [0, \infty)$ $n \in \mathbb{N}$.

$$x=0 \Rightarrow f_n(0) = 0 \frac{(0^n - 1)}{(0^n + 1)} = 0 \frac{(-1)}{(1)} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

$$x=1 \Rightarrow f_n(1) = 1 \frac{(1^n - 1)}{(1^n + 1)} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$

$$0 < q < 1 \quad f_n(q) = q \frac{(q^n - 1)}{(q^n + 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(q) = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q^n - 1)}{(q^n + 1)} = q \cdot \frac{(-1)}{(1)} = -q$$

$$x > 1 \quad f_n(x) = x \frac{(x^n - 1)}{(x^n + 1)} \quad \begin{cases} x^n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow \infty \\ x > 1 \end{cases}$$

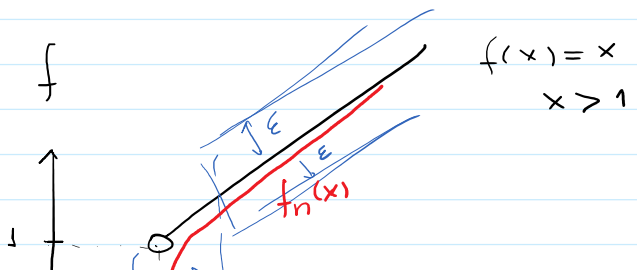
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{x^n (1 - 1/x^n)}{x^n (1 + 1/x^n)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{(1 - 1/x^n)}{(1 + 1/x^n)} = x \cdot \frac{1}{1} = x$$

$$f_n(x) \rightarrow x \quad \begin{matrix} n \rightarrow \infty \\ x > 1 \end{matrix}$$

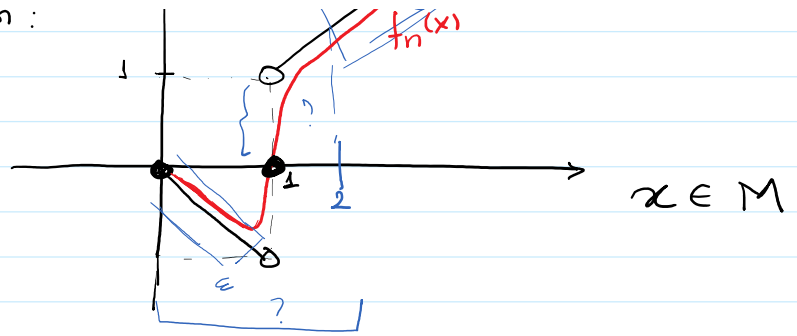
$f(x)$ gränsfunktion:

$f_n(x) = x$



$f(x)$ gransfunktion:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(q) &= -q, \quad 0 < q < 1 \\ f(x) &= x, \quad x > 1 \end{aligned}$$



Obs $f_n(x) = x \frac{(x^n - 1)}{(x^n + 1)}$ kontinuerliga på $M = [0, +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ punktvís $f(x) = \begin{cases} -x & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \\ x & ; x > 1 \end{cases}$

Satsen 19.7

f_n kontinuerliga på $M \Rightarrow f$ kontinuerlig på M
 $f_n \rightarrow f$ likformigt $\times$

Enligt Satsen 19.7 $f_n \rightarrow f$ men inte likformigt

c) $M^* = [2, +\infty)$ $f_n \rightarrow f$ likformigt konvergens på M^*

Lösning:

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet $M^* = [2, +\infty)$

Då har vi

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| x \frac{(x^n - 1)}{(x^n + 1)} - x \right| = \left| \frac{x(x^n - 1) - x(x^n + 1)}{(x^n + 1)} \right| =$$

$x \in M^* = [2, \infty)$

$$= \left| \frac{x \cdot x^n - x - x \cdot x^n - x}{(x^n + 1)} \right| = \left| \frac{-2x}{x^n + 1} \right| = \frac{2x}{x^n + 1} \leq a_k$$

Mål: Hitta a_k = talföljd som kontrollerar $\frac{2x}{x^n + 1} \leq a_k$

och $a_k \rightarrow 0$
 $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^n + 1} = 0$$

$x > 2 \rightarrow \infty$

$\left| \frac{2x}{x^n + 1} \right|$ är strängt avtagande: $\forall x \in M^* = [2, +\infty)$

$$\left(\frac{2x}{x^n+1}\right) \text{ är } \boxed{\text{strängt avtagande: } \forall x \in M^* = [2, +\infty)}$$

Därför att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x^n+1} \right) &= \frac{2(x^n+1) - 2x(nx^{n-1})}{(x^n+1)^2} = \frac{2x^n+2-2nx^n}{(x^n+1)^2} \\ &= \frac{2[1+x^n(1-n)]}{(x^n+1)^2} = \frac{2[1-(n-1)x^n]}{(x^n+1)^2} \end{aligned}$$

$$1 - (n-1)x^n < 0 \iff$$

$$1 < (n-1)x^n$$

$$\begin{aligned} n &> 1 \quad (n \rightarrow \infty) \\ x &> 2 \quad x^n > 2^n > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Då } \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x^n+1} \right) < 0$$

då $\frac{2x}{x^n+1}$ strängt avtagande $x=2$

$$\frac{2x}{x^n+1} < \frac{2(2)}{2^n+1} =$$

$$\frac{4}{2^n+1}$$

a_n talföljd som konvergerar

Nu kan man hitta $N_\epsilon > 0$ beroende på $\epsilon > 0$ så att

$$n > N_\epsilon$$

$$a_n \rightarrow 0$$

Då har vi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{2x}{x^n+1} < \frac{4}{2^n+1} < \epsilon$$

Jag vill hitta n som behåller olikhet.

$$\frac{4}{2^n+1} < \epsilon \iff \frac{4}{\epsilon} < 2^n+1 \iff \frac{4}{\epsilon} - 1 < 2^n$$

$$\iff \frac{4-\epsilon}{\epsilon} < 2^n$$

$$\ln\left(\frac{4-\epsilon}{\epsilon}\right) < \ln(2^n) = n \ln(2) \iff$$

$$N = \frac{\ln\left(\frac{4-\epsilon}{\epsilon}\right)}{\ln(2)} < n$$

$$\varepsilon = \ln(2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{När } n > N_\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \text{ har vi} \\ |f_n - f| = \frac{2x}{x^n + 1} < \frac{4}{2^n + 1} < \varepsilon \end{array} \right.$$

Då är konvergens $f_n \rightarrow f$ likformigt $\square$

1927 sidan 109

Visa att $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln nx}{n^p}$ $p > 1$ definierar

en för alla x kontinuerligt funktion $f(x)$.

gränzfunktion är kontinuerlig.

Lösning: Enligt Weierstrass Majorantsats

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in M \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ likformigt konvergent}$$

u_k kontinuerliga

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k$$

S_n kontinuerliga

$$S_n \rightarrow S \text{ likformigt}$$

$\Rightarrow S$ är kontinuerlig
Sats (19.7)
(19.8)

Lösning: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln kx}{k^p} \right) \quad p > 1$

$$u_k(x) = \frac{\ln kx}{k^p}$$

Oberoende på x nu.

$$|u_k(x)| = \left| \frac{\sin kx}{k^p} \right| \leq \frac{1}{k^p} \quad \text{oberoende p\u00e5 } x \text{ nu.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p > 1$$

$$\oplus \quad |\sin kx| < 1 \quad k \in \mathbb{N} \quad p > 1$$

$$\forall x \in M = \mathbb{R}$$

D\u00e5 har vi $a_k = \frac{1}{k^p}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergent $p > 1$

D\u00e5 enligt Weierstrass majorantsats

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p} \quad \text{konvergerar likformigt p\u00e5 } M = \mathbb{R}.$$

Nu enligt Sats 19.8

$$\text{gr\u00e4nsfunktion } S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$$

\u00e4r ocks\u00e5 kontinuerlig!

$$S(x) = f(x)$$

Extra 1926 Best\u00e4m de x f\u00f6r vilka f\u00f6ljande funktionsserier konvergerar

och ber\u00e4kna seriernas summer:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^n = x^2 \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x^2+1} \right)} \right)$$

$$\leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n + \dots$$

$$|\alpha| < 1 \quad \text{serier konvergerar}$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha}$$

om $\left| \frac{1}{x^2+1} \right| < 1 \quad \alpha = \frac{1}{x^2+1}$

$$= x^2 \frac{1}{\left(\frac{x^2+1-x}{x^2+1} \right)} = \cancel{x^2} \frac{(x^2+1)}{\cancel{x^2}} = \underline{\underline{x^2+1}}$$

Nu ska vi tänka på möjliga x värde:

$$S(x) = x^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$$

$$\forall x \in (0, \infty) \cup (-\infty, 0)$$
$$x \neq 0.$$

Nhà $x=0$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^2}{(0^2+1)^n} = 0 \\ \text{Đã } \underline{s(0) = 0} \end{array} \right.$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ \underline{x^2+1} & , x \neq 0 \end{cases}$$