# R1_V9_25maj2021

den 24 maj 2021 14:19

(Föreläsning 23 - Repetition 1 - Veckan 9.

Tentamen 2019/10/12 lösning + diskussion:

1. Bestäm alla $k \in \mathbb{Z}$ för vilka $U_{(k)}$ utgör ett underrum av $\mathbb{R}^4 = V$.
Konstruera för dessa $k$ en bas för $U_{(k)}$ och bestäm $\dim U_{(k)}$.

$$U_{(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b+k \\ a+b+c \\ c-a \end{bmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \leftarrow$$

Lösning.

Tanka. $U$ underrum: $\begin{cases} u, v \in U \Rightarrow u+v \in U \\ \alpha \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow \alpha u \in U \end{cases}$

(Om $U$ är underrum då $0 \in U$) $\quad$ ($0 \notin U \Rightarrow U$ ej underrum)

Antag $u, v \in U_{(k)}$ godtyckliga

$u \in U \Rightarrow u = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ b_1+k \\ a_1+b_1+c_1 \\ c_1-a_1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $v \in U \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a_2+b_2 \\ b_2+k \\ a_2+b_2+c_2 \\ c_2-a_2 \end{pmatrix}$

$$u+v \Rightarrow \begin{pmatrix} (a_1+b_1) + (a_2+b_2) \\ (b_1+k) + (b_2+k) \\ (a_1+b_1+c_1) + (a_2+b_2+c_2) \\ (c_1-a_1) + (c_2-a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{A}{(a_1+a_2)} + \overset{B}{(b_1+b_2)} \\ \overset{B}{(b_1+b_2)} + 2k \\ \overset{A}{(a_1+a_2)} + \overset{B}{(b_1+b_2)} + \overset{C}{(c_1+c_2)} \\ \underset{C}{(c_1+c_2)} - \underset{A}{(a_1+a_2)} \end{pmatrix}$$

$u+v \in U_{(k)} \Rightarrow 2k = k \Rightarrow 2k-k=0 \quad \boxed{k=0}$

$$\alpha u \quad \begin{pmatrix} \overset{A}{\alpha a_1} + \overset{B}{\alpha b_1} \\ \overset{B}{\alpha b_1} + \alpha k \\ \alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 \\ \alpha c_1 - \underset{A}{\alpha a_1} \end{pmatrix} \in U_k \Rightarrow \alpha k = k \Rightarrow$$

$\alpha k - k = 0$

$(\alpha - 1)k = 0$

$\begin{cases} (\alpha-1) = 0 \Rightarrow \cancel{\boxed{\alpha = 1}} \\ \boxed{k=0} \end{cases}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ godtyckliga.

Då är $\boxed{k=0}$ endast möjlighet.

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b \ldots \end{bmatrix} \right.$ ... $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b \\ a+b+c \\ c-a \end{bmatrix} ; \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \text{ underrum } \subset \check{V} = \mathbb{R}^4 .$$

ii) Bestäm bas och dim för $U$.

$w \in U \quad w = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} , \quad a,b,c$

$U = \text{Span}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$

Att $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ vara en bas till $U$, behöver också $B$ vara linjärt Oberoende.

$$\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3 = \vec{0} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

Med gaussianelimination ska vi bestämma ~~om~~ lösning för ~~Homogena~~ system.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{pivot} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ \text{pivot} \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{pivot} \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1\alpha = 0 \\ 1\beta = 0 \\ 1\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

endast lösning

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ är bas och $\dim U = \# B = 3$.

- $Ax = 0 \quad x =$ lösning av Homog. system.

$N(A) = \{x \in V \,/\, Ax = 0\}$ ett underrum

$x_1, x_2 \in N(A)$ $\quad Ax_1 = 0$

$Ax_2 = 0$

$(x_1 + x_2) \Rightarrow A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0+0=0$

$(\alpha x_1) \Rightarrow A(\alpha x_1) = \alpha Ax_1 = \alpha 0 = 0$

---

$Ax = b$ $\quad b \in V$

$x = x_H + x_p$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_{1H} + x_p \\ x_2 = x_{2H} + x_p \end{array}\right\} \quad x_1 - x_2 = (x_{1H} + \cancel{x_p}) - (x_{2H} + \cancel{x_p}) = x_{1H} - x_{2H} = x_H$$

$$A(\underbrace{x_H + x_p}_{\text{allmänn lösning.}}) = Ax_H + Ax_p = 0 + b = b$$

---

(7). $U$ ändligt dimensionellt underrum $U \subseteq V$, $V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Visa att

(i) $\forall u \in V$ existerar entydigt $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$ så att $u = u' + u''$

(ii) om vi har ON-bas $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_k\}$ för $U$

$u' = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle u, e_k \rangle e_k$.

Lösning.

$U \subset V$ underrum.

$\boxed{U \cap U^\perp = \{0\}}$

Lösning.

Tanka

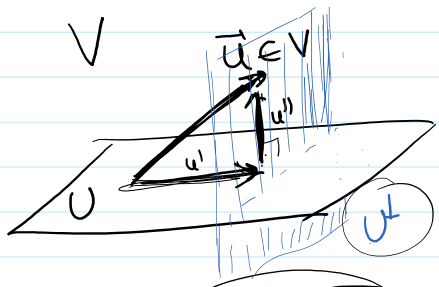
$U \subset V$ underrum

$\boxed{U \cap U^{\perp} = \{0\}}$

$U^{\perp} = \{ w \in V \ / \ \langle w, u \rangle = 0, \ \forall u \in U \}$ def

$U^{\perp}$ underrum också (sats)

lemma 2.2 $(U^{\perp})^{\perp} = U$ (när ortogonala projektion på U existerar för varje $u \in V$.)




$u' = \text{proj}_U u$

$u'' = u - u' \iff u = u' + u''$

lemma 2.1 (Entydighet)

$u \in V \Rightarrow u = u_1' + u_1''$, $u_1' \in U$, $u_1'' \in U^{\perp}$

$u = u_2' + u_2''$, $u_2' \in U$, $u_2'' \in U^{\perp}$

$u_1' + u_1'' = u = u_2' + u_2'' \iff$

$\underbrace{u_1' - u_2'}_{\in U} = \underbrace{u_2'' - u_1''}_{\in U^{\perp}} = w \Rightarrow$

$w \in U$ också $w \in U^{\perp} \Rightarrow w \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow w = \vec{0} \Rightarrow u_1' - u_2' = \vec{0}$ och

$u_1'' - u_2'' = \vec{0}$ $\Rightarrow$

$u_1' = u_2'$ & $u_1'' = u_2''$

Då är $u = u' + u''$, $u' \in U$, $u'' \in U^{\perp}$ unik.

entydligt. $\square$

(7 ii) ON-bas $\{e_1, e_2, \dots e_k\}$ för $U$

Då $u' = \langle u, e_1 \rangle$

Tanka

ON-bas: är en bas så att

$\|\vec{e_i}\| = 1$ $\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = 0$

$\langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle = \|\vec{e_i}\|^2 = 1$

$$\boxed{u = \underbrace{\text{proj}_U\, u}_{u'} + u''}$$

$u' = \text{proj}_{e_1} u + \text{proj}_{e_2} u + \dots + \text{proj}_{e_k} u$

$$= \frac{\langle u, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 + \frac{\langle u, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 + \dots + \frac{\langle u, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k$$

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = \|\vec{e}_i\|^2 = 1$

$U$ underrum $B$ = bas till $U$

Med Gram-Schmidt kan man skappa O-bas $\{w_1, \dots w_n\}$

$$e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

ON-bas $= \{\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n\} \Rightarrow \langle e_i, e_i\rangle = \|e_i\|^2 = 1$

$$\boxed{u' = \langle u, e_1\rangle \bar{e}_1 + \langle u, e_2\rangle \vec{e}_2 + \dots + \langle u, e_k\rangle \vec{e}_k} \quad \circledast$$

$$\boxed{\underbrace{u - u'}_{} = \underbrace{u''}_{} \perp U}$$

för varje $j = 1, 2, \dots, k$ räknar vi

$$\langle \underbrace{u - u'}_{u''}, e_j\rangle = \langle u, e_j\rangle - \langle u', e_j\rangle =$$

$$= \langle u, e_j\rangle - \langle \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \langle u, e_n\rangle e_n}, e_j\rangle =$$

$$= \langle u, e_j\rangle - \sum_{n=1}^{k} \langle u, e_n\rangle \underbrace{\langle e_n, e_j\rangle}_{\substack{= 1 \text{ när } n = j \\ = 0 \text{ när } n \neq j}} =$$

$$= \langle u, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle = 0$$

Då $u = u' + u''$

$$\boxed{u' = \text{proj}_U u = \sum_{n=1}^{k} \langle u, e_n\rangle e_n}$$

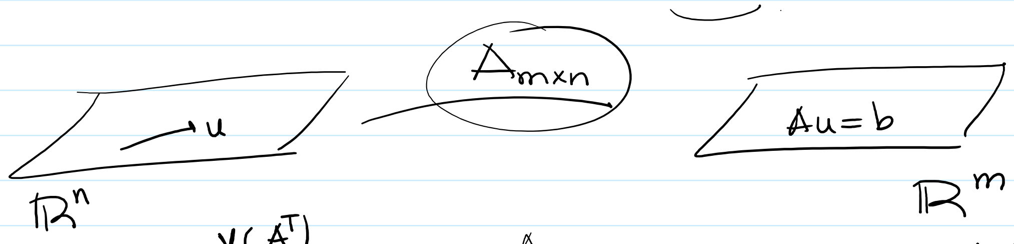
$u'' \Rightarrow \text{proj}_U u'' = 0 \quad (u'' \perp U)$

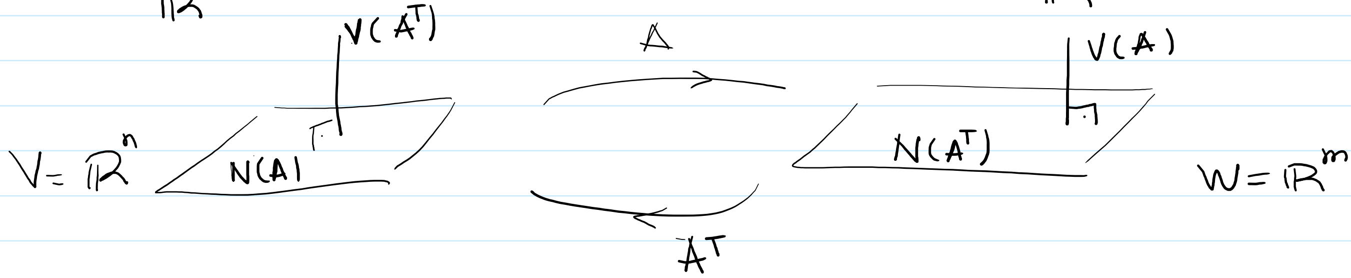
□

**Obs**: Sidan 76 / § 2.3 Fundamentala underrumen

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$u \to T(u) = A_{m\times n} \cdot (u_{n\times 1}) = b_{m\times 1}$$




Sats 2.11 sidan 77

$$N(A) = V(A^T)^{\perp} \qquad N(A)^{\perp} = V(A^T)$$

också:

$$N(A^T) = V(A)^{\perp} \quad \& \quad N(A^T)^{\perp} = V(A)$$

$U$ = underrum, $B$ = bas till $U = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \vec{u}_k\}$

man kan komplettera $B$ så att man skappa

em Bas till $V = \{u_1, u_2, \ldots u_k, w_1, w_2, \ldots w_s\}$

2: $V = C[-\pi, \pi] = \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \ / \ f$ är kontinuerlig$\}$

$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\,dx \leftarrow$

$F_2 \subseteq V \qquad F_2 = \text{Span}\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x)\}$

a) Bestäm projektion $f_2$ av $f(x) = |x|$ på $F_2$.

b) Bestäm avstånd av $f$ och $f_2$.

c) Bestäm Fourier-serien med period $2\pi$ för $f(x)$

d) använd serien för att beräkna summan till

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$$

Lösning: $U = \text{Span}\{B\}$

a) $B = \{ \underset{\vec{u}_0}{1}, \underset{\vec{v}_1}{\sin(x)}, \underset{\vec{u}_1}{\cos(x)}, \underset{\vec{v}_2}{\sin(2x)}, \underset{\vec{u}_2}{\cos(2x)} \}$

är $B$ en bas till $U$ ( är $B$ en ortogonal bas till $U$? )

$$\langle u_0, u_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \| 1 \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\underbrace{\langle \cos x, 1 \rangle}_{u_1, \, u_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, 1 \cdot dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad u_1 \perp u_0$$

$$\langle \sin x, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot 1 \, dx = \left[ -\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} = -[1-1] = 0$$

$1 \perp \cos x$, $1 \perp \sin x$

Partiell integrering

$$\langle \sin x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx =$$

$$[\cos x(-\cos x)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin x)(-\cos x) \, dx = 0$$

$\sin x \perp \cos x$

$\langle \sin(2x), \cos(2x) \rangle = 0$ ( med variabelbyte )

$$\langle \cos x, \cos x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \qquad \langle \cos 2x, \cos 2x \rangle = \pi$$

$$\langle \sin x, \sin x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \qquad \langle \sin 2x, \sin 2x \rangle = \pi$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos x \, dx \quad \text{PI}$$

$$= [x]_{-\pi}^{\pi} - \left[ [\cos x \sin x]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} (\cancel{-}\sin x)(\sin x \, dx \right]$$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = 2\pi - 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{2\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

Eftersom B är en ortogonal - Bas

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right\} \quad \text{ON - Bas}$$

Då har vi:

$$\operatorname{proj}_{F_2} f = \left\langle f, \frac{1}{\|1\|} \right\rangle \frac{1}{\|1\|} + \left\langle f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} +$$

$$\left\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$$

$$+ \left\langle f, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos 2\pi}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{\langle f, 1 \rangle 1}{\|1\|^2} + \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\pi} \sin x +$$

$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 2\pi$

$$+ \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\pi} \cos x + \frac{\langle f, \sin 2x \rangle}{\pi} \sin 2x$$

$$+ \frac{\langle f, \cos 2x \rangle}{\pi} \cos 2x$$

$$f_2 = \operatorname{proj}_{F_2} f = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos x \rangle$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos 2x \rangle$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin x \rangle$$

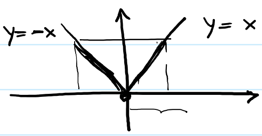
$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin 2x \rangle$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin 2x\rangle$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}$$

2(ii) $f_2$

$f(x) = |x| \qquad x \in [-\pi, \pi]$




$f(x) = |x|$

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

f är jämn funktion

Då $b_1 = 0 = \langle f, \sin x\rangle = 0$

$b_2 = 0 \qquad \langle f, \sin 2x\rangle = 0$

$$\langle f, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = 2\int_0^{\pi} x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{\pi}$$

$$= \cancel{2}\,\frac{\pi^2}{\cancel{2}} = \pi^2$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f, 1\rangle}{2\pi} = \frac{\pi^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}} = \frac{\pi}{2}$$

$\langle f \cos x\rangle =$

$\langle f, \cos 2x\rangle =$

$\langle f, \cos kx\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos kx\,dx = 2\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos kx\,dx = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\underbrace{\cos kx\,dx}_{dv} = PI$$

$k = 1, 2, \ldots$

$u = x \qquad du = 1$

$dv = \cos kx \qquad v = \frac{\sin kx}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\left[\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\,\frac{\sin kx}{k}\,dx\right]$$

$$\frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{1}{k}\left[\cancel{-}\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\left(\cos k\pi - \cos 0\right)\right] =$$

$k = 1 \Rightarrow \cos\pi = -1$

$k = 2 \Rightarrow \cos 2\pi = 1$

$k = 3 \Rightarrow \cos 3\pi = -1$

$$\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$(-1)^k$

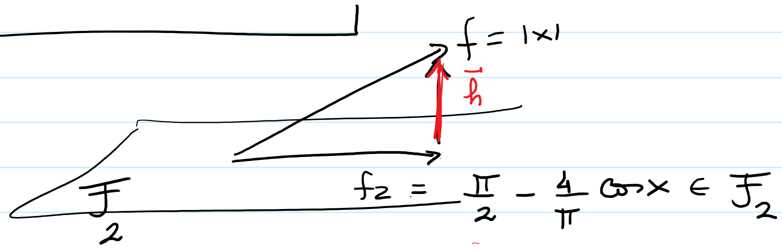
$\frac{2}{\pi \cdot k^2}\left[\underbrace{(-1)^k - 1}\right]$ $\qquad k=3 \longrightarrow \cos 3\pi = -1$

$$(-1)^k - 1 = \begin{cases} -2 & k = 2n-1 \\ 0 & k = 2n \end{cases}$$

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{4}{k^2\pi} & k = 2n-1 \quad (\text{udda}) \\ 0 & k = 2n \quad (\text{jämn}) \end{cases}$$

$$f_2 = \operatorname{proj}_U f = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} 1 + 0 \sin x + \frac{\langle f, \cos x\rangle}{\langle \cos x, \cos x\rangle}\cos x + 0 \sin 2x + 0 \cos 2x$$

$$f_2 = \frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{4}{\pi}\cos x$$




$$h = f(x) - f_2$$

$$\boxed{h = |x| - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x\right)}$$

2iii) avstånd mellan $f$ & $f_2$ $\qquad d(f, f_2) = \sqrt{\underbrace{\|f - f_2\|}^2} = \|f - f_2\|$

$$\|f - f_2\|^2 = \langle f - f_2, f - f_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_2)^2\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(|x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x\right)^2 dx = \ldots$$

R: $\|h\|^2 = \dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{16}{\pi} \Rightarrow \|f - f_2\| = \sqrt{\dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{16}{\pi}}$

---

Fourier serie på $[-\pi, \pi]$ $\qquad f(x) = |x|$ på $[-\pi, \pi]$

$f$ är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$

på $[-\pi, \pi]$

$f$ är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$

Då $f(x) \simeq S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)$

$$\boxed{S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cos((2n-1)x)}$$

Fourier serien av $f$ på $[-\pi, \pi]$

$$\boxed{S(x) = f(x) \text{ på } [-\pi, \pi]}$$

2. iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = ?$

$f(0) = |0| = 0 \qquad 0 \in [-\pi, \pi]$

$f(0) = S(0) \qquad 0 \in [-\pi, \pi]$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}} \cdot 1 \quad \cos(0)$$

det är konvergent (*) enligt jämförelse kriteriet.

$$\cancel{-}\frac{\pi}{2} = \cancel{-}\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

---

5. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} x^k$

a) absolut konvergent b) betingat konvergent c) divergent.

Lösning: Tanka: Absolut konvergent

- $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergen $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent

• Betingat konvergent

$\sum a_k$ konvergent men $\sum |a_k|$ diverg.

Exempel: $\underbrace{\sum (-1)^k \frac{1}{k}}$ konv $\quad \sum \frac{1}{k}$ div.

$|(-1)^k \frac{1}{k}| = \frac{1}{k}$

divergent: $\sum a_k \to \infty$
eller oscillation
eller var som helst beteende så att $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$

## Kvot kriteriet

$$a_k = \frac{1}{\ln(k+1)} \qquad a_{k+1} = \frac{1}{\ln(k+1+1)} = \frac{1}{\ln(k+2)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k+2)} \ln(k+1) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k(1+1/k))}{\ln(k\cdot(1+2/k))} = \frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{\ln k + \ln(1+2/k)} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{\ln k}\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)}\right)}{\cancel{\ln(k)}\left(1 + \frac{\ln(1+2/k)}{\ln k}\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{\ln k}\cdot \ln(1+\frac{1}{k})}{1 + \frac{1}{\ln k}\cdot \ln(1+\frac{2}{k})} \right) = 1 = A$$

$\to 0 \quad \to 0 \quad \to \infty \quad 0\cdot 0$

$$R = \frac{1}{A} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \underline{\text{Konvergensradie}}$$

för $|x| < R$ är serien konvergent

$|x| > 1$ är serien divergent

?? $x = 1$ och $x = -1$ ?? ← Vi behöver analysera

$$\boxed{x=1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$$

$b_k$

$$\sum_{k=1} \quad \sum_{k=1} \quad \sum_{k=1} \ln(k+1)$$

$b_k$

$b_k = \ln(k+1) \qquad a_k = k$

$$\boxed{\lim_{k\to} \frac{\ln(k+1)}{k} = 0} \Rightarrow a_k \to \infty \text{ snabare än } b_k.$$

$$\forall k > N_\varepsilon \Rightarrow \underline{b_k = \ln(k+1) < k = a_k} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{b_k} > \frac{1}{a_k} \quad \forall k > N_\varepsilon$$

$$\frac{1}{\ln(k+1)} > \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \text{ då är } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} \text{ också divergent}$$

$X = 1 \notin$ Konvergensintervalet. $X = 1 \Rightarrow$ serien är divergent.

$$\boxed{X = -1} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln(k+1)}}_{a_k} (-1)^k$$

Leibniz konvergens kriteriet (för alternerande serier)

$$a_k = \frac{1}{\ln(k+1)} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} = 0}$$

Då enligt Leibniz k. är serien konvergent

för $\boxed{X = -1}$ är serien då $\boxed{\text{Betingat konvergent}}$, dvs,

$$\sum \frac{1}{\ln(k+1)} (-1)^k \text{ Konvergent MEN } \sum \left| \frac{1}{\ln(k+1)} (-1)^k \right| =$$

$\sum \frac{1}{\ln(k+1)}(-1)^k$ Konvergent MEN $\sum \left|\frac{1}{\ln(k+1)}(-1)^k\right| =$

$= \sum \frac{1}{\ln k+1}$ div. $\square$

---

(6) Visa att $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-k/x}$ definerar en kontinuerlig funktion på $(0,\infty)$

$u_k(x)$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$\lim_{x\to 0^+} u_k(x)$

$\lim_{x\to\infty} u_k(x)$

## Viktiga satser

**Sats 19.8** Om $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt mot $S(x)$ på $M$

k variation

och

$u_k(x)$ är kontinuerliga på $M$

x variation

Då är också $S(x)$ kontinuerlig på $M$.

**Sats 19.9** Om $|u_k(x)| \le a_k \quad \forall x \in M$

och

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Så är $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent (TEJ)

Obs: • Vi ska använda satsen 19.9 som en verktyg att bevisa att funktionsserier är likformigt konvergent.

• Då att använda Weierstrass majorant sats behöver vi också visa att varje termer är kontinuerlig

• Då enligt W-M sats ska vi bevisa att $S(x)$ är kontinuerlig på $M$.

## Lösning

$u_k = \frac{1}{x^2} e^{-k/x} \quad x \in (0,+\infty) = M$

$\forall k \in \mathbb{N} \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ kontinuerlig på } (0,\infty) \\ e^{-k/x} \text{ kontinuerlig på } (0,\infty) \end{cases}$ (+)

$\lim_{x\to 0^+} u_k(x)$ existerar

$\lim_{x\to \infty} u_k(x)$ existerar

$$\forall k \in \mathbb{N} \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{kontinuerlig på } (0,\infty) \\ e^{-k/x} & \text{kontinuerlig på } (0,\infty) \end{cases} \quad (+)$$

$\lim_{x\to 0^+} u_k(x)$ existerar

$\lim_{x\to\infty} u_k(x)$ existerar

Då är $u_k \equiv$ produkt av kontinuerliga funktioner en kontinuerlig funktion på samma mängd. $M=(0,\infty)$

Att förstår bättre funktionsbeteende beräkna vi:

1) $$\frac{d}{dx}u_k(x) = \left(\frac{d}{dx}(x^{-2})\right)e^{-k/x} + \left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{-k/x}\right) =$$

$$= (-2x^{-3})\,e^{-k/x} + x^{-2}\left(e^{-k/x}\cdot\frac{d}{dx}\left(-\frac{k}{x}\right)\right) =$$

$$= (-2x^{-3})\,e^{-k/x} + x^{-2}e^{-k/x}\cdot\left(\cancel{-}k\left(\cancel{-}1x^{-2}\right)\right) =$$

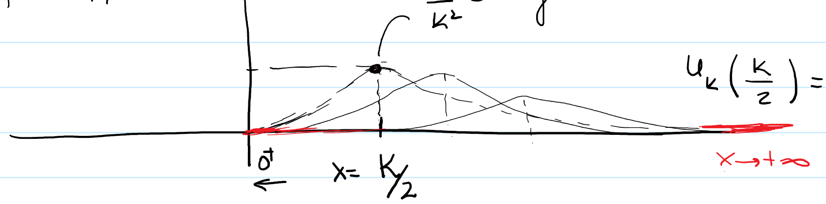
$$= -\frac{2}{x^3}e^{-k/x} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2}\cdot k\,e^{-k/x}$$

$$= \frac{e^{-k/x}}{x^3}\left[-2+\frac{k}{x}\right] \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

$$\frac{d}{dx}u_k(x)=0 \iff \frac{e^{-k/x}}{x^3}\left[-2+\frac{k}{x}\right]=0 \implies -2+\frac{k}{x}=0$$

$$\frac{k}{x}=2 \quad \therefore \quad \boxed{x=\frac{k}{2}} \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

för $k=1,2,\ldots$ på $(0,\infty)$ har vi $\frac{4}{k^2}e^{-2}$ globalt maximum.




$$u_k\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2}e^{-\frac{k\cdot 2}{k}} = \frac{e^{-2}}{\left(\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{4e^{-2}}{k^2}$$

(*)

$$\lim_{x\to\infty} u_k(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}e^{-k/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{e^{k/x}} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} u_k(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}e^{-k/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{e^{k/x}} \to 0$$

Snabare än varje polynom

$$u_k\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{k^2}e^{-2} \quad \text{globalt max på } M \quad \forall k=1,2,\ldots$$

$$\implies |u_k(x)| \le \frac{4}{k^2}e^{-2} = \frac{4}{k^2}\frac{1}{e^2} < \frac{4}{k^2} \qquad \forall x\in(0,\infty),\ k=1,2,\ldots$$

$k = 1, 2, \ldots$

Nu hittade vi vår majorant

Antag $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\quad a_k = \dfrac{4}{k^2}$ som är majorant till $u_k(x)$ på $M = (0, +\infty)$

Och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent.

Då Enligt Weierstrass majorantsats

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ är likformigt konvergent på $M = (0, +\infty)$

$\blacksquare$

---

(8) Visa att

Om $\left[\begin{array}{l} f_n \text{ är kontinuerliga funktioner} \\ f_n \to f \text{ likformigt konvergent på } [a,b] \end{array}\right.$ $\overset{*}{\Rightarrow}$ ($f$ kontinuerlig)

Så $\left[\right.$ är $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Det är precis satsen 19.10.

Bevis: Enligt hipotes $f_n$ är kontinuerliga på $M = [a,b]$.

d.v.s $\left\{\begin{array}{l} f_n(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} f_n(\alpha) \qquad x, \alpha \in [a,b]. \\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$

Enligt hipotes har vi också att $f_n \to f$ likformigt på $M$
$M = [a,b]$

Då har vi att

$f_n \to f$ likformigt $\overset{*}{\Longrightarrow}$ $f$ kontinuerlig
Sats 19.7

att visa det

Antag $\varepsilon > 0$ $\quad (\varepsilon/3 > 0)$ vi vill visa att

$\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ så att $\quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_0)|}_{} + \underbrace{|f_n(x_0)-f(x_0)|}_{}$$

$f_n \to f$ likformig

$f_n$ är kontinuerlig $\leq \varepsilon/3$

likformig konvergent $\Rightarrow$ punktvis konvergent

$\exists N_\varepsilon \; . \; n > N_\varepsilon \Rightarrow$

$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$

Då när $|x-x_0| < \delta$

och $\delta$ beroende på $\varepsilon/3 > 0$ som bestämdes för $f_n$ kontinuitet, har vi

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{d.v.s} \quad f \text{ kontinuerlig } \square$$

Men $f$ kontinuerlig $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ existerar.

och

$f_n$ kontinuerliga $\Rightarrow$ $\int_a^b f_n(x)\,dx$ existerar $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nu bevisar vi att $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Antag $\varepsilon > 0$. $\to$ $\varepsilon/(b-a) > 0$ och på grund av de likformiga konvergens

har vi att det finns $N_\varepsilon$ så att

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a) \Rightarrow$$

och

$a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{}\,dx \underset{*}{<} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{\cancel{(b-a)}} \cdot \cancel{(b-a)} = \varepsilon$$

Då är

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$