R2_V9_26maj

den 26 maj 2021 13:06

(8) Visa att

Om $\left[\begin{array}{l} f_n \text{ kontinuerliga} \\ f_n \to f \text{ likformig på } [a,b] \end{array}\right.$

så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Bevis (Uppgift är satsen 19.10)

Hjälp satsen: $\left\{\begin{array}{l} f_n \to f \text{ likformigt konverg.} \\ f_n \text{ kontinuerliga} \end{array}\right. \Longrightarrow$ f är kontinuerlig.

Att bevisa det:

vi vill visa att $\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) \right)$

Antag $\varepsilon > 0$ $\left(\frac{\varepsilon}{3} > 0\right)$? $x \to a \overset{?}{\Longrightarrow} |f(x) - f(a)| < \varepsilon$?

$$\underbrace{|f(x) - f(a)|}\ = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \leq$$

$$= \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\otimes} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{\boxtimes\boxtimes} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{*} \leq$$

$\otimes$ enligt Hypotes

$f_n \to f$ likformigt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ $\forall n > N_\varepsilon$

$\boxtimes\boxtimes$ f_n är kontinuerlig $\forall n$ $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$

$*$ likformig konverg $\Longrightarrow$ punktvis konvergen

$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon/3$

$$\leq \varepsilon/\varepsilon + \varepsilon/\varepsilon + \varepsilon/\varepsilon = \varepsilon$$

Då är f kontinuerlig $\forall x \in M$.

f kontinuerlig $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existerar $< \infty$

f_n kontinuerliga $\Longrightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx$ existerar $< \infty$

f_n kontinuerliga $\Rightarrow$ $\int_a f_n(x)\,dx$ existerar $< \infty$

? $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$?

Enligt likformigt konvergens av $f_n \to f$

Antag $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon/_{b-a}$) kan man också välja

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq$$

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \underset{f_n \to f}{<} \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon \int_a^b 1\,dx = \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

likformigt $\forall x \in M \ \forall n > N_\varepsilon$

$\blacksquare$

Tentan 2020-06-05

1) $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$ bas för V = vektorrum $\quad F: V_{,B} \to V_{,B}$

$F: V \to V$ linjär avb.

$v \to F(v) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_B [v]_B$

$b_1 = 2c_1 + c_2$

$b_2 = 1c_1 - c_2$

$M_c^B = ((b_1)_c \ (b_2)_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

? Bestäm dimensionen of V / ? $v \in V$ så att $[F(v)]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

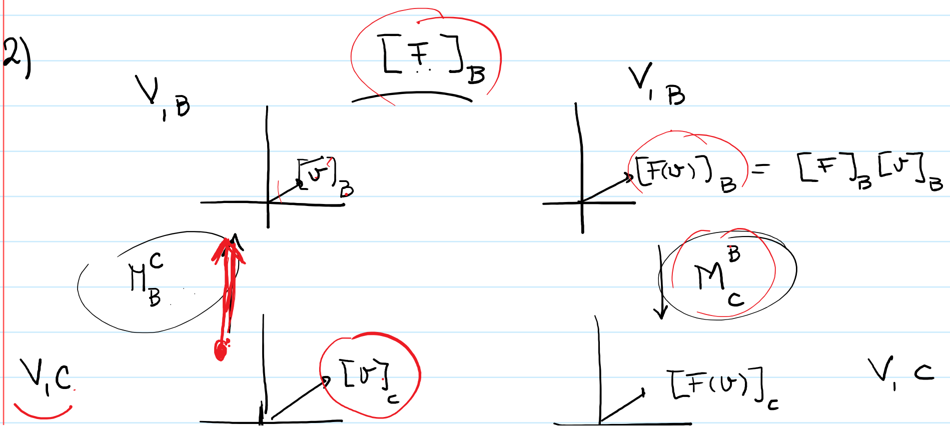
1) $\operatorname{Dim} V = \# B = \# C = 2$

$[F]_c [v]_c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

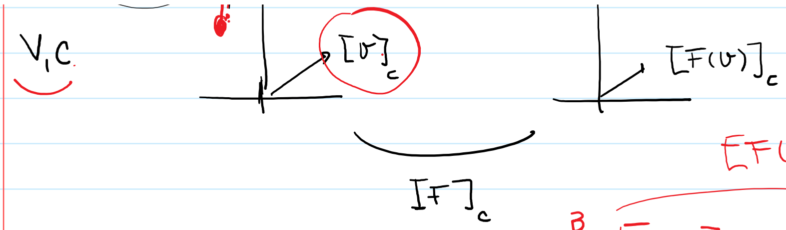
$A x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

? x ?

2)



$\boxed{M_B^C = (M_C^B)^{-1}}$



$$\overbrace{M^B_C \underbrace{[F]_B \overbrace{M^C_B [v]_C}^{[v]_B}}}^{[F(v)]_B} = [F(v)]_C$$

$$[F]_C \, [v]_C = [F(v)]_C$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M^B_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^C_B = (M^B_C)^{-1} = \frac{1}{\det M^B_C} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det M^B_C = -2-1 = -3$$

$$M^C_B = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[F]_C = M^B_C \, [F]_B \, M^C_B$$

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[F]_C = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Nu bestämmer vi $v = \binom{x}{y}_C$ så att $[F]_C [v]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C$

$$\det [F]_C \neq 0 \Rightarrow \exists \, [F]_C^{-1}$$

$$\det [F]_C = -\frac{1}{3} [-16+7] = \frac{\cancel{-}(\cancel{-}9)}{3} = 3$$

Då $$[F]_C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & +7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Då $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_C = [F]_C^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_C \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_C =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} +8+7 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}_C$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} +8+7 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 15 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}_c$$

$$\boxed{v = 5c_1 + 1c_2 = [5, 1]_c}$$

2

$$F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$$

$$p(t) \longrightarrow F(p(t)) = 3p(t) - p(1-t)$$

- F är linjärt
- engenvärden & egenfunuktoner till F.

$$* \begin{cases} F(p(t) + q(t)) = F(p(t)) + F(q(t)) \\ F(\alpha p(t)) = \alpha F(p(t)) \end{cases}$$

$$\circledast \; F(\alpha p(t) + \beta q(t)) = \alpha F(p(t)) + \beta F(q(t))$$

Antag $\begin{cases} p(t), q(t) \text{ godtyckliga funktioner i } \mathbb{P}_2 = V \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$F(\underbrace{\alpha p(t) + \beta q(t)}_{\in \mathbb{P}_2}) = 3(\alpha p(t) + \beta q(t)) - [\alpha \cdot p(1-t) + \beta q(1-t)]$$

$$= 3(\alpha p(t)) - \alpha p(1-t) + 3\beta q(t) - \beta q(1-t)$$

$$= \alpha [3p(t) - p(1-t)] + \beta [3q(t) - q(1-t)]$$

$$= \alpha F(p(t)) + \beta F(q(t)) \qquad \square$$

Då är F linjärt.

2) $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$

$$p(t) \to F(p(t)) = 3p(t) - p(1-t)$$

$B = \{1, t, t^2\}$ standard bas till $\mathbb{P}_2$.

$p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 t^2 \qquad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$

$$F(t) = 3p(t) - p(1-t) =$$

$$= 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2$$

$$- [a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2] =$$

$$= 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2$$
$$- [a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2] =$$

$$= 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2$$
$$- [(a_0 + a_1) - a_1 t + a_2(1 - 2t + t^2)] =$$

$$= 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2$$
$$- [(a_0 + a_1 + a_2) + t(-a_1 - 2a_2) + a_2 t^2] =$$

$$= [2a_0 - a_1 - a_2] + t[3a_1 + a_1 + 2a_2] + t^2[3a_2 - a_2] =$$

$$= [2a_0 - a_1 - a_2] + [4a_1 + 2a_2]t + t^2[2a_2] = F(p(t))$$

$$A = \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ F(1) \quad F(t) \quad F(t^2) \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_0 - a_1 - a_2 \\ 4a_1 + 2a_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$$

3) Bestäm egenvärde & egenfunktioner.

$$\boxed{F(v) = \lambda v} \qquad Av - \lambda v = \underbrace{(A - \lambda I)}\, v = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad A \text{ är diagonal} \Rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = 2$, med multiplicitet $= 2$: $(\lambda_1 = \lambda_3)$

$\lambda_2 = 4$

$$\boxed{\lambda = 2} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2-2 & -1 & -1 \\ 0 & 4-2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{G.E}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad 0a_0 + 1a_1 + 1a_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} 0a_0 + 1a_1 + 1a_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_1 = -a_2 \end{cases}$$

egenfunktioner är $\begin{cases} P_0(t) = a_0 \cdot 1 \\ P_1(t) = -a_2 t + a_2 t^2 \end{cases}$

$\underline{\lambda = 4}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2a_0 - a_1 = 0 \\ 0 + 0 + 1a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$2a_0 + a_1 = 0 \qquad \boxed{a_1 = -2a_0}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -2a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2(t) = -a_0 1 + 2a_0 t \qquad P_2(t) = (-1 + 2t)$$

$\lambda = 2 \Rightarrow V_{\lambda=2} = \text{span}[P_0(t), P_1(t)]$ 2 dimensionel underrum

multiplicitet $= 2$

$P_0(t) = \alpha 1$

$P_1(t) = \beta(-t + t^2)$

---

3 $V = \mathbb{P}_2[0,1]$ $U = \{ p(t) = a_0 + a_2 t^2 : a_0, a_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1] \}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$$

•) U är underrum

••) Bestäm ortogonal projektion av $q(t) = t$ på U

______, ______, ______, ______, ______

∘ ✓

••) $U = \{ p(t) = a_0 \cdot 1 + a_2 t^2 \} = \text{Span}\{1, t^2\}$

$a_0, a_2 \in \mathbb{R}$

$B = \{1, t^2\}$ Bas till U

Mål är $\text{proj}_U q(t)$ att göra det behöver vi har en Ogonal Bas till U.

Gram-Schmidt att bygga upp O.-Bas → ON-bas.

$$\langle 1, t^2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 0$$

(1 och t^2 är inte orgonal)

$u_1 = 1$

$$\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$u_2 = t^2 - \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$$

$$u_2 = t^2 - \frac{(1/3)}{1} \cdot 1 \Rightarrow u_2 = \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{O-Bas} = \{1, t^2 - 1/3\} \qquad q(t) = t$$

Nu kan vi beräkna $\text{proj}_U q(t) = \text{proj}_1 q(t) + \text{proj}_{(t^2 - 1/3)} q(t)$

$$\text{proj}_U q(t) = \frac{\langle t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle t, t^2 - 1/3 \rangle}{\langle t^2 - 1/3, t^2 - 1/3 \rangle} (t^2 - 1/3)$$

$$\int_0^1 t \cdot 1\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 1\, dt = [t]_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 t\left(t^2-\frac{1}{3}\right)dt = \int_0^1 t^3 - \frac{1}{3}t\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

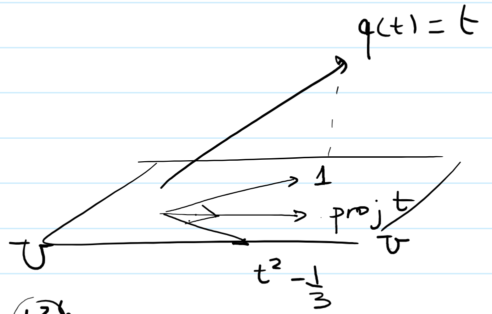
$$\int_0^1 \underbrace{\left(t^2-\frac{1}{3}\right)}_{\text{Bas vector}}{}^2\, dt = \int_0^1 \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right)dt =$$

$$= \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{9}\left[t\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

$$\text{proj}_U\, t = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + \frac{\left(1/12\right)}{\left(4/45\right)}\left(t^2 - 1/3\right) \Rightarrow$$

$$\text{proj}_U\, t = \frac{1}{2}t + \frac{45}{48}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$



$$U = \text{Span}\{1, t^2\} = \qquad B_1 = \{1, t^2\}$$

$$= \text{Span}\{1, (t^2 - 1/3)\} \qquad B_2 = \{1, t^2 - \frac{1}{3}\}$$

$$\text{proj}_U\, t = \underbrace{\frac{1\cdot 1}{2} + \frac{45}{48}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)} \longrightarrow (t)_U = \left(\frac{1}{2}, \frac{45}{48}\right)_{B_2}$$

$$\frac{45}{48}t^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{45}{48}\cdot\frac{1}{3}\right) \qquad (t)_U = \left(\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{45}{48}\cdot\frac{1}{3}}_{1}, \underbrace{\frac{45}{48}}_{t^2}\right)_{B_1}$$

---

(4) Bestäm $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller differensekvationen

(4) Bestäm $\{y_n\}_{n=0}$ som uppfyller differensekvation

$$\begin{cases} y_{n+2} - 5y_n = 2^n - n \\ y_0 = -7/8 \quad y_1 = 3/8 \end{cases}$$

$-n = -n + 0.1$

- Bestämma $\underline{y_H}$ Hom. ekvation
- Bestäm y_p måste vara $\{y_H, y_p\}$ linjärt Oberoende
- Bestäm konstanta med hjälp av Begynnelsevillkor.

- y_H : $\boxed{y_n^H = r^n}$ $r \neq 0$ $\Rightarrow$ $y_{n+1} = r^{n+1}$ $y_{n+2} = r^{n+2}$ $\Rightarrow$

Hom eku: $r^{n+2} - 5r^n = 0$ $\quad \underbrace{r^n}_{\neq 0}(\underbrace{r^2-5}) = 0 \Rightarrow r^2 - 5 = 0$

$r^2 = 5 \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

$$y_n^H = A\underbrace{(\sqrt{5})^n} + B\underbrace{(-\sqrt{5})^n}$$

~~(problem Bara om $y_H = A2^n + Bn2^n$~~

~~$y^p = Cn^2 2^n$~~

~~(problem: $y_H = A2^n + B(1)^n$~~

$$y_n^p = \underbrace{C2^n} + \underbrace{Dn + E}.1$$

$$y_{n+1}^p = C2^{n+1} + D(n+1) + E \Rightarrow (C2).2^n + Dn + (D+E)$$

$$y_{n+2}^p = C2^{n+2} + D(n+2) + E \Rightarrow (C.4)2^n + Dn + (2D+E)$$

y_{n+2}	$4C2^n + Dn + (2D+E)$
$-5y_n$	$-5C2^n - 5Dn - 5E$
$1.2^n - 1n + 0.1$	$(-5+4)C2^n + (1-5)Dn + (2D-4E)$

$$\underbrace{1 2^n - 1\cancel{n} + 0\cancel{1} = -C2^n + (-4D)}\cancel{n} + (2D-4E)\cancel{1}$$

$| -C = 1 \Rightarrow | \boxed{C = -1}$

$$\begin{cases} -C = 1 \\ -4D = -1 \\ 2D - 4E = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

$D = 1/4$

$\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) = 4E \Rightarrow E = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$\boxed{y_n^p = -2^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{8}}$$

$$y_n = \boxed{A(\sqrt{5})^n + B(-\sqrt{5})^n - 2^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{8}}$$

$$\begin{cases} y_0 = -7/8 \\ y_1 = 3/8 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(\sqrt{5})^0 + B(-\sqrt{5})^0 - 2^0 + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8} \\ A(\sqrt{5})^1 + B(-\sqrt{5})^1 - 2^1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 - \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = 1 - 1 = 0 \\ \sqrt{5}A - \sqrt{5}B = \underbrace{3/8 - 1/8}_{} - 1/4 + 2 = 2 \end{cases}$$

$\cancel{2/8 - 1/4}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \sqrt{5}A - \sqrt{5}B = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = -B \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{matrix} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^n}_{} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{5})^n - 2^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{8} \qquad \underline{\underline{\forall n \geq 0}}$$

$(\sqrt{5})^{-1}(\sqrt{5})^n$

$(5)^{(n-1)/2}$

man kan simplifiera expression...

---

5) Konvergent eller divergent?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+4}\right) \stackrel{*}{=}$

a) $\sum_{k=1} \underbrace{\ln\left(\frac{k}{k+4}\right)}$ $\overset{*}{=}$

$$\ln\left(\frac{k}{k+4}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(1+\frac{4}{k})}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{4}{k}}\right) = \cancel{\ln(1)}^{0} - \underbrace{\ln\left(1+\frac{4}{k}\right)}$$

$$\overset{*}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\ln\left(1+\frac{4}{k}\right)}$$

$k > 4 \Rightarrow$

$x = \frac{4}{k} < 1$

för $0 < x < 1$ Har vi Maclaurinutveckling till $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} =$$

$$= (-1)^0 \frac{x^1}{1} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\ln\left(1+\frac{4}{k}\right) = \frac{4}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\sum \underbrace{\ln\left(1+\frac{4}{k}\right)} \approx 4\underbrace{\sum \frac{1}{k}}_{\text{divergent}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+4/k)}{4/k} = \frac{\cancel{4/k} + \cancel{\mathcal{O}(1/k^2)}^{0}}{\cancel{4/k}} = A = 1 > 0$$

Satsen 18.9

a_k, b_k $\lim \frac{a_k}{b_k} = A > 0 \Rightarrow \sum a_k, \sum b_k$ har sama beteende

$\sum b_k$ divergent $\Rightarrow \sum a_k$ divergent

$4\sum 1/k \Rightarrow \sum_{k=5}^{\infty} \ln\left(1+\frac{4}{k}\right)$ divergent

$$\parallel$$

$$\sum \ln\left(\frac{k}{k+4}\right)$$

∞

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}_{a_k}$ alternerande serie

Lösning : Leibnizkriteriet

om $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ då är $\sum (-1)^k a_k$ konvergent.

$a_k = \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$

$k=1 \Rightarrow \sin(\pi/1) = \sin(\pi) = 0$

$k=2 \Rightarrow \sin(\pi/2) = 1$

$k=3 \Rightarrow \sin(\pi/3) =$

$\vdots$

$k=n \Rightarrow \sin(\pi/n)$

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \overset{*}{=} \sin\left(\lim_{k\to\infty}\frac{\pi}{k}\right) = \sin(0) = 0$$

$*$ $\sin(x)$ är kontinuerlig funktion

Då enligt Leibnizk. är $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$ konvergent.

---

6 • Bestäm en potensserie som löser differentialekv.

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0 & p \in \mathbb{R}. \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

• Bestäm $R(p)$ = konvergensradie beroende på p.

Lösning : Antar

Lösning:

Antag

$$y_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_n' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x y_n' = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

inkludera $n=0$

$$y_n'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$n-2=k$

$n=k+2$

$$y_n'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$x^2 y_n'' = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

Substitute all terms in equation:

$$1y'' - x^2 y'' - x y' + p^2 y = 0$$

$$\Big[\underbrace{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - n a_n + p^2 a_n}_{b_n}\Big] x^n = 0 \iff$$

Så, att potensserien vara lösning, alla koefficienter b_n måste vara 0.

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-n)a_n - n a_n + p^2 a_n = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 - \cancel{n} + \cancel{n})a_n - p^2 a_n = (n^2 - p^2)a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{(n^2-p^2)\,a_n}{(n+2)(n+1)}} \quad n = 0,1,2,\dots$$

Nu använder vi begynnelse vilkor $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_0 + \cancel{a_1(0)} + \cancel{a_2(0)^2} + \dots = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow \sum^{\infty} n a_n x^{n-1}\Big| = 1 \Rightarrow 1a_1 + 2a_2 0^1 + 3a_3 0^2 + \dots \Rightarrow \boxed{1a_1 = 1}$$

$$y'(0)=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow 1a_1 + 2a_2 0^1 + 3a_3 0^2 + \dots \Rightarrow \boxed{1a_1 = 1}$$

Nu använde båda $a_0 = 0$ & $a_1 = 1$ att starta potensserier och skappa allmänn termer beroende på a_0 & a_1.

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_{n+2} = \frac{(n^2-p^2)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad n=0,1,\dots$$

$$n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{(0^2-p^2)}{(2)(1)} a_0 = \frac{-p^2}{(2)} a_0 = 0 \qquad (a_0=0)$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{(4^2-p^2)}{(4)(3)} a_2 = 0 \quad (a_2=0)$$

$\vdots$ } induktions argument $a_{2k}=0$

$$n=2k \Rightarrow a_{2k+2} = \frac{((2k+2)^2-p^2)}{(2k+2)(2k+1)} a_{2k} = 0$$

Då $a_{2k} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Nu analyserar vi fallet $a_1, a_3, \dots a_{2k+1} \dots$

$$a_1 = 1$$

$$a_3 = a_{1+2} = \frac{(1^2-p^2)}{(3)(2)} a_1 = \frac{(-1)(p^2-1^2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = a_{3+2} = \frac{(3^2-p^2)}{(5)(4)} a_3 = (-1)\frac{(p^2-3^2)}{(5.4)} a_3 = (-1)^2 \frac{(p^2-3^2)(p^2-1^2)}{(5)(4).3!} a_1$$

$$\underbrace{a_5}_{2(2)+1} = \frac{(-1)^2}{5!}\left(\prod_{j=1}^{2} (p^2-(2j-1)^2)\right) a_1$$

$$\underbrace{a_7}_{2(3)+1} = a_{5+2} = \frac{(5^2-p^2)}{(5+2)(5+1)} a_5 = \frac{(-1)(p^2-5^2)}{7.5} \cdot \frac{(-1)^2}{5!}\left(\prod_{j=1}^{2} (p^2-(2j-1)^2)\right) a_1$$

$$\underset{2(3)+1}{a_7} = \frac{(-1)^3}{7!} \prod_{j=1}^{3} (p^2-(2j-1)^2)\, a_1$$

Då kan vi skriva allmän term för alla udda index

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} \left(p^2 - (2j-1)^2\right) a_1$$

Då Lösning är:

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k, \text{ med } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(p^2 - (2j-1)^2\right) a_1 \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ii) $R(p)$ konvergensradie som funktion av p:

Obs: $\prod_{j=1}^{k} \left(p^2 - (2j-1)^2\right) = (p^2 - 1^2)(p^2 - 3^2)(p^2 - 5^2) \cdots (p^2 - (2j-1)^2)$

Den här polynomn i variable p har root som en udda tall $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \pm (2j-1)$

Då när $p = \pm 1, \pm 2, \dots \pm (2j-1)$

eller: $\boxed{p = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}}$, har vi bara en ändligt antal termer i den serie $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

eftersom $a_{2k+1} = 0 \quad \forall \quad 2k+1 > p = (2m+1)$

$2k > p-1 \Rightarrow k > \frac{p-1}{2}$

(*) Då $y_n = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}-1} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots + a_{p-2} x^{p-2}$.

$k > \frac{p-1}{2}$ (då sista term i summan har $k = \frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-1-2}{2} = \frac{p-3}{2}$

$2k+1$ när $k = \frac{p-3}{2} \Rightarrow \cancel{2}\left(\frac{p-3}{\cancel{2}}\right) + 1 = p-2$

Då är (*) en konvergent serie oberoende på x

(på grund av vara en ändligt summan)

I det fall $R(p) = \infty \quad p = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}$.

Nu ska analysera $R(p)$ när $\begin{cases} p \in \mathbb{R}, \text{ som} \\ p \neq 2m+1, \ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

Här Behöver vi bytta variable att analysera på bra sätt för vilka värde har vi konvergens.

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x \cdot x^{2k} =$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} (x^2)^k \Longrightarrow \left\{ x^2 = t \right.$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} t^k$$

Nu kan vi titta kvotkriteriet :

Kvot kriteriet $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2(k+1)+1}}{a_{2(k)+1}} \right| = A > 0$

Då $R(p) = \frac{1}{A}$ (Här $|t| < R$)

Men kommer ihåg att $t = x^2 \Longrightarrow |x^2| < R \Longleftrightarrow$

$$\boxed{|x| < \sqrt{R}}$$

Det har vi inte förklarat på bra sätt i Repetitions möte

Och det är VIKTIGT !

Nu räknar vi

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} \right|$$

Bara en detalje : $a_{2k+3} = a_{(2k+1)+2} = \alpha \, a_{2k+1}$

med $\alpha = \frac{(-1)\left(p^2 - (2k+1)^2\right)}{(2k+3)(2k+2)}$

Då är $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}\right| = \left|\frac{\alpha\, \cancel{a_{2k+1}}}{\cancel{a_{2k+1}}}\right| = |\alpha| = \frac{((2k+1)^2 - p^2)}{(2k+3)(2k+2)} =$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{4k^2 + 2k + (1-p^2)}{4k^2 + 4k + 6k + 6} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{4k^2}\left(1 + \frac{2k}{4k^2} + \frac{(1-p^2)}{4k^2}\right)}{\cancel{4k^2}\left(1 + \frac{10k}{4k^2} + \frac{6}{4k^2}\right)} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2k} + \frac{(1-p^2)}{4k^2}\right)}{\left(1 + \frac{5}{2k} + \frac{3}{2k^2}\right)} = 1 = A$$

Då $R(p) = \frac{1}{A} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow |t| < 1$

$$\boxed{\text{Då} \quad R(p) = \sqrt{1} \qquad |x| < \sqrt{1}}$$

Ja bara skriver så där att markera att det är nödvändigt att anpassa R enligt den variabel byte.

Jag hoppas att det är bättre nu!

Tack så mycket för idag!

Alice