Matematik
Chalmers Tekniska Högskola
Examinator: Alice Kozakevicius

Hjälpmedel: alla är tillåtna utan samarbete
IT-supporten 031-7726600

Tentamen i TMA227-LGMA62: Matematisk fördjupning

Fredag 4 juni 2021, $14^{00} - 18^{00}$; tid enbart för skanning, $18^{00} - 18^{30}$

1. $V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Låt M=$\{A \in V : sp(A) = 0\}$, $sp(A)$=$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$=spåret av A. Bevisa att M är ett underrum till V. **(4 p)**

2. Låt $T : V \to W$ vara en linjärt avbildning. Visa att:
Om $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ är linjärt beroende i V, så är $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ linjärt beroende i vektorrummet W. **(4 p)**

3. Låt $\mathbb{P}_2 = Span\{1, x, x^2\}$ med standard basen C=$\{1, x, x^2\}$.
   (a) Låt B=$\{p_1, p_2, p_3\}$ med $p_1 = -4(x + 1/2)(x - 1/2)$, $p_2 = 2x(x + 1/2)$, $p_3 = 2x(x - 1/2)$. Hitta koordinaterna till p_1, p_2, p_3 i standard basen C. **(1 p)**
   (b) Bevisa att B=$\{p_1, p_2, p_3\}$ är också en bas till $\mathbb{P}_2$. **(2 p)**
   (c) Hitta övergångsmatrisen från basen B till standard basen C. **(1 p)**
   (d) Bestäm koordinaterna för de tre poynomen $1, x$ och x^2 i basen B. **(2 p)**

4. Bestäm det förstagrads polynom $p(t)$ som minimerar $\int_0^1 (\sqrt{(}t) - p(t))^2 dt$. Motiverar svar. **(6 p)**

5. Lösa följande differensekvation med begynnelsevärden. **(6 p)**

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n &= 3n + 5, \\ y(0) = 0, y(1) = 1 & \end{cases}$$

6. Bestäm i form av en potensserie en lösning till differentialekvationen med begynnelsevärden nedan och bestäm konvergensradie **(7 p)**

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y &= 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 & . \end{cases}$$

7. Låt $f_n(x) = \dfrac{n}{n + |\cos(x)| + (x\sqrt{n})^2}$. Bestäm $lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx$. Motivera enligt de satser som stöder ditt svar. **(8 p)**

8. (a) Bestäm Fourierserien med period 2π till $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ -1, & 0 < x < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$ **(6 p)**

(b) Använd det för att beräkna summan till serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k-1)}$. **(3 p)**

---

1. Symboler: $\forall$ för alla, för varje; $\exists$ det finns; $\wedge$ och; $\vee$ eller; $\Rightarrow$ innebär

2:an. Maxpoäng 50. Betygsgränser: **3**: 20-29, **4**: 30-39, **5**: 40-50.

3:an. Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

4. Lösningar läggs ut på kurshemsidan senast 7 juni.

5. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.