Tenta_04juni_2021_Lösningar_1

den 31 maj 2021 09:38

1) $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $\quad M = \{A \in V : sp(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = 0\}$ 4p

Bevisa att M är ett underrum. av V.

Lösning:

Antag $A, B \in M$ och $\alpha \in \mathbb{R}$

$A \in M \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = 0$

$B \in M \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = 0$

$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]$ ∴ ? $A+B \in M$?

Då $\sum_{k=1}^{n} (a_{kk}+b_{kk}) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kk}}_{A\in M} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{kk}}^{B\in M} = 0+0 = 0$

Då $(A+B) \in M$.

$\alpha A = [\alpha a_{ij}] \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{kk}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \alpha \cdot 0 = 0$

Då $\alpha A \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Däremot är M ett underrum.

---

2) Låt $T: V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att: 4p

[Om $\{v_1, v_2, .. v_n\}$ är linjärt beroende i V
Så är $\{T(v_1), T(v_2), .. T(v_p)\}$]

Lösning.

$A = \{v_1, v_2, .. v_n\}$ linjärt beroende $\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n = 0$ med oändliga Lösningar till $\alpha_1 ... \alpha_n$.

$\Rightarrow$ Det finns $v_j \in \{v_1 ... v_n\}$ så att v_j är linjär kombination

$\Rightarrow$ Det finns $v_j \in \{v_1 \dots v_n\}$ så att v_j är linjär kombination av den andra i sättningen A.

man kan ordna igen och antag att $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n$

$T: V \to W$ linjär avbildning:

Då $T(v_1) = T(\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) \in W$.

Det betyder att $T(v_1)$ är linjär kombination av $\{T(v_2), \dots T(v_n)\}$

Och då $\{T(v_1), \dots T(v_n)\}$ är linjärt Beroende i W.

3). Låt $\mathbb{P}_2 = \text{Span}\{1, x, x^2\}$. och $G = \{1, x, x^2\}$ standard bas. 6p

3.1) $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ $p_1 = -4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$; $p_2 = 2(x+\frac{1}{2})x$, $p_3 = 2x(x-\frac{1}{2})$

1p Hitta koordinaterna av p_1, p_2, p_3 i standard bas.

1p 3.2) Bevisa att B är också en bas till $\mathbb{P}_2$.

2p 3.3) Hitta övergångsmatrisen från B till Standard bas G.

2p 3.4) Bestäma koordinaterna av $\{1, x, x^2\}$ i bas B.

Lösning. $G = \{1, x, x^2\}$

3.1 $p_1(x) = -4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = -4(x^2 - \frac{1}{4}) = -4x^2 + 1 = 1.1 + 0.x + (-4)x^2$
$= (1, 0, -4)_G$

$p_2(x) = 2(x+\frac{1}{2})x = 2(x^2 + \frac{1}{2}x) = 2x^2 + 1x = 0.1 + 1.x + 2.x^2$
$= (0, 1, 2)_G$

$p_3(x) = 2x(x-\frac{1}{2}) = 2(x^2 - \frac{1}{2}x) = 2x^2 - x = 0.1 - 1.x + 2x^2$
$= (0, -1, 2)_G$

3.2 $B = \{p_1, p_2, p_3\} = \{-4x^2+1, 2x^2+x, 2x^2-x\}$

• B är en linjärt Oberoende av sättning om $\vec{0}$ skappas som trivial linjär kombination av element av B.

$\alpha(-4x^2+1) + \beta(2x^2+x) + \gamma(2x^2-x) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\alpha(-4x^2+1)+\beta(2x^2+x)+\gamma(2x^2-x)=0 \iff$ element av B.

$$\begin{cases} -4\alpha x^2 + 2\beta x^2 + 2\gamma x^2 = 0 \\ \beta x - \gamma x = 0 \\ \alpha \cdot 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} \beta = \gamma \\ \alpha = 0 \end{matrix}$$

$0 + 2\gamma + 2\gamma = 0 \Rightarrow 4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \;\&\; \alpha = 0$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ endast lösning, då är B linjärt oberoende.

• $U = \text{Span}\{p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{P}_1$, $\dim U = \dim \mathbb{P}_1$ då. $U = \mathbb{P}_1$ & B = bas till $\mathbb{P}_1$ också.

3.3 $$\begin{matrix} p_1 = (1,0,-4)_c \\ p_2 = (0,1,2)_c \\ p_3 = (0,-1,2)_c \end{matrix} \Rightarrow M_c^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.4. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow \tfrac{1}{4} L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$[1]_B \quad [x]_B \quad [x^2]_B$$

$1 = 1p_1 + 1p_2 + 1p_3 = 1(-4x^2+1) + 1(2x^2+x) + 1(2x^2-x) = 1.$

$x = 0p_1 + \tfrac{1}{2}p_2 - \tfrac{1}{2}p_3 = 0(-4x^2+1) + \tfrac{1}{2}(2x^2+x) - \tfrac{1}{2}(2x^2-x) =$

$= x^2 - x^2 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 1x$ ✓

$x^2 = 0p_1 + \tfrac{1}{4}p_2 + \tfrac{1}{4}p_3 = 0(-4x^2+1) + \tfrac{1}{2}(2x^2+x) + \tfrac{1}{2}(2x^2-x) =$

$= \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x}{4}} + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x}{4}} = x^2$

4. Bestäm den förstagrad polynom $p(t)$ som minimerar

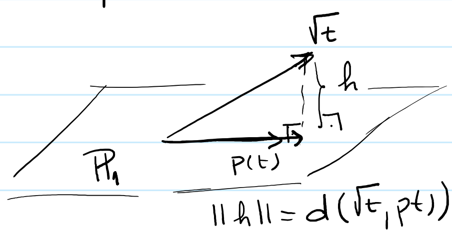
$$\int_0^1 \left(\sqrt{t} - p(t)\right)^2 dt$$ 6p

Lösning. Betrakta $C[0,1]$ med skalärprodukt $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$

$\mathbb{P}_1 = \{ p_1(t) = at + b \; : \; a, b \in \mathbb{R} \}$ på $[0,1]$ $\quad B = \{1, t\}$ standardbasen

$$\int_0^1 \left(\sqrt{t} - p(t)\right)^2 dt = \langle \sqrt{t} - p(t), \sqrt{t} - p(t)\rangle = \|\sqrt{t} - p(t)\|^2 \quad \circledast$$

$p(t)$ som minimeras är då $p(t) = \operatorname{proj}_{\mathbb{P}_1} \sqrt{t}$



$$\int_0^1 1^2\,dt = [t]_0^1 = 1 \qquad u_1 = 1$$

$$\int_0^1 1\,t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \qquad \therefore \; u_2 = t - \frac{(1/2)}{1} \cdot 1 = (t - 1/2)$$

Då $B = \{1, \; t - 1/2\}$ ortogonal bas till $\mathbb{P}_1$.

$$\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_1} \sqrt{t} = \operatorname{proj}_1 \sqrt{t} + \operatorname{proj}_{(t - 1/2)} \sqrt{t} = \frac{\langle \sqrt{t}, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 + \frac{\langle \sqrt{t}, t - 1/2\rangle}{\langle t - 1/2, t - 1/2\rangle} (t - 1/2)$$

$$\langle \sqrt{t}, 1\rangle = \int_0^1 1\sqrt{t}\,dt \quad ; \quad \int_0^1 \sqrt{t}\,(t - \tfrac{1}{2})\,dt = \langle \sqrt{t}, (t - 1/2)\rangle$$

$$\int_0^1 t^{1/2}\,dt \qquad \int_0^1 t^{3/2} - \tfrac{1}{2} t^{1/2}\,dt \qquad \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$\left[\tfrac{2}{3} t^{3/2}\right]_0^1 \qquad \tfrac{2}{5} \cdot \left[t^{5/2}\right]_0^1 - \left(+\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}\right)\left[t^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$\tfrac{2}{3} \cdot 1 \qquad \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\int_0^1 (t - 1/2)^2\,dt = \int_0^1 t^2 - t + 1/4\,dt =$$

$$\left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\tfrac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{4} t\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$$

Då $\operatorname{proj}_{\mathbb{P}_1}\sqrt{t}=\frac{2}{3}1+\frac{(1/15)}{(1/12)}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{2}{3}(1)+\frac{4}{5}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Frågade ej

Avstånd: $d(\sqrt{t},\mathbb{P}_1)=\sqrt{\int_0^1\left(\sqrt{t}-\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\right)\right)^2dt}$ $\qquad \frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{10-6}{15}$

$$\int_0^1\left(\sqrt{t}-\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{5}t\right)\right)^2dt=\int_0^1 t-2\sqrt{t}\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{5}t\right)+\left(\frac{4}{15}+\frac{4}{5}t\right)^2dt\ \dots$$

—, —

5) Lösa differensekvation: med begynnelseproblem:

$$\begin{cases} y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_n=3n+5 \\ y(0)=0 \quad y(1)=1. \end{cases}$$

6p

Lösning. 1^{st}: Homog. ekv.

$y_n=r^n \quad y_{n+1}=r^{n+1} \quad y_{n+2}=r^{n+2}$

$r^{n+2}-2r^{n+1}+2r^n=0 \qquad r^n(r^2-2r+2)=0 \Rightarrow$

$r^2-2r+2=0 \quad \therefore \quad r_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}$

$r_{1,2}=1\pm i \qquad \|r_{1,2}\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$r_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \qquad r_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$r_1=\sqrt{2}e^{i\pi/4} \qquad r_2=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

$y_n=Ar_1^n+Br_2^n=A(\sqrt{2})^ne^{in\pi/4}+B(\sqrt{2})^ne^{-in\pi/4} \Longrightarrow$

$$\boxed{y_n=A\sqrt{2}^n\cos n\pi/4+B\sqrt{2}^n\sin n\pi/4}$$

$$y_n^p = An + B$$

$$y_{n+1}^p = A(n+1) + B = An + (A+B)$$

$$y_{n+2}^p = A(n+2) + B = An + (2A+B)$$

Substitute:

$$\begin{array}{lcl} y_{n+2} & & An + \cancel{2A} + B \\ -2y_{n+1} & & -\cancel{2An} - \cancel{2(A+B)} \\ +2y_n & & +\cancel{2An} + \cancel{2(B)} \\ \hline 3n+5 & = & An + B \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 5 \end{cases}$$

$$y_n = A(\sqrt{2})^n \cos n\pi/4 + B(\sqrt{2})^n \sin n\pi/4 + 3n + 5$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot \cancel{(0)} + 3\cancel{(0)} + 5 = 0 \Rightarrow A = -5 \\ A \cdot (\sqrt{2}) \cos(\pi/4) + B\sqrt{2} \sin(\pi/4) + 3(1) + 5 = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$A\,\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} + B\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 8 \Rightarrow$$

$$(-5) + B(1) = -7$$

$$B = -7 + 5 = -2$$

$y_n = (-5)\sqrt{2}^n \cos(n\pi/4) - 2(\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4) + 3n + 5$ är ekvationslösning $\square$.

---

6. Lösa IVP med Potensserie och ge konvergensradie. 7p

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Lösning

$$y_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

∞ ∞

$$y_n' = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

$$x y_n' = x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

$$y_n'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y_n'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Substitute:

$$\begin{array}{rl} y'' = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \\ + x y' & \\ + 2y & \displaystyle + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \\ \hline 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+2) a_n \right) x^n \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = -(n+2) a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{-\cancel{(n+2)} a_n}{\cancel{(n+2)}(n+1)} = \frac{-a_n}{(n+1)}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \iff \boxed{a_0 = 1}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow \left. \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right|_{x=0} = 2 \iff 1 a_1 = 2 \iff \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{(1)} \qquad a_3 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{3} = \frac{(-1)^2 a_0}{1 \cdot 3} \qquad a_5 = -\frac{a_3}{4} = -\frac{(-a_1)}{2 \cdot 4} = \frac{(-1)^2 a_1}{2 \cdot 4}$$

$$a_7 = \frac{-1 a_5}{6} = \frac{(-1)^3 a_1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5} = \frac{(-1)^3 a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5} \qquad a \quad = (-1)^k a_1$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{5} = \frac{(-1)^3 a_0}{1.3.5}$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{\prod_{j=1}^{k} 2j}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$\cancel{a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{\prod_{j=1}^{k}(2j)}$$

$$y_n = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{\prod_{j=1}^{k}(2j)} =$$

$$\prod_{j=1}^{k}(2j) = 2(1).2(2)\ldots(2k) = 2^k.(1.2.3\ldots k) = 2^k.k!$$

$$y_n = \cancel{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cancel{2^k}.k!} x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k . x^{2k+1}}{2^{k-1}.(k)!}$$

a_{2k-1}, a_{2k+1} Kvot kriterium:

-

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}\right| = \left| \frac{\cancel{(-1)^k}}{2^{k-1}.(k)\cancel{!}} \cancel{(-1)^{k-1}} 2^{k-2}(k-1)\cancel{!} \right| =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} = 0 = A \therefore R = \frac{1}{A} = \infty$$

$$y_n = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{k-1}.k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

+ 3p till här

7. Låt $f_n(x) = \dfrac{n}{n + |\cos x| + (x\sqrt{n})^2}$. (8p)

Motivera egenskappen av $f_n(x)$ enligt satsen vi studerade och

Bestäm $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$

Lösning:

För att bestämma

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx \quad (*)$$

behöver vi analysera problemet enligt satsen 19.11.
Om de 3 egenskaper av Hypotes är sanna, då kan man beräkna gränsvärde $(*)$

Satsen 19.11 (Om Dominerad Konvergens)

Om
1) $\int_I f_n(x)\,dx$ existerar för alla $n \geq n_0$
2) $f_n \to f$ punktvis på I och $\int_I f(x)\,dx$ existerar
3) $\exists\, g: I \to \mathbb{R}$, $\int_I g(x)\,dx$ existerar och $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall\, x \in I, \forall\, n \geq n_0$.

Då

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$$

$$f_n(x) = \frac{n}{n + |\cos x| + (x\sqrt{n})^2} \qquad I = [0, +\infty)$$

(1) ✓

$f_n(x)$ kontinuerlig $\forall\, x \in I$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $\int_I f_n(x)\,dx$ existerar. $\forall\, n \geq 1$.

$$f_n(x) = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \frac{|\cos x|}{n} + \frac{(x\sqrt{n})^2}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{|\cos x|}{n} + \frac{x^2 \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}}} =$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2}$$

$$|\cos x| \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos x}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{(Sandwish satsen)}$$

$$\text{Då} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{punktvis}$$

(2) ✓

$$\text{och} \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan x\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \pi/2.$$

(iii) $$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2}\right| \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{1+x^2} = f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Här är $g(x) = f(x)$ majorant funktion $\qquad 1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2 \overset{(*)}{\geq} 1 + x^2 \Rightarrow$

Här är $g(x) = f(x)$ majorant funktion som vi behöver för att få använda satsen 19.11

$$1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2 \overset{(*)}{\geq} 1 + x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 + \frac{|\cos x|}{n} + x^2} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{1+x^2}$$

Då enligt satsen 19.11 om Dominerad konvergens är

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \pi/2 .$$

□

9p

8) a) Bes m Fourierserien med period 2π till $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ -1, & 0 < x < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

(5p)

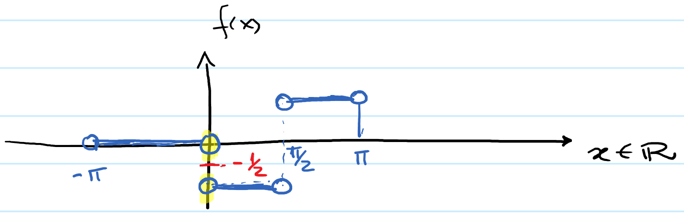
b) använd det för att beräkna summan till serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k-1)}$$

(4p)

Lösning:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ -1 & , 0 < x < \pi/2 \\ 1 & , \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \langle f(x), 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (-1)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1)\,dx = \Big[-x\Big]_0^{\pi/2} + \Big[x\Big]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \Big[x\Big]_{\pi/2}^{0} + \Big[x\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 0 - \pi/2 + \pi - \pi/2 = 0$$

$$a_k = \langle f(x), \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx \quad , k = 1, 2, 3, \ldots \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} -1 \cos kx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cos kx\,dx \right] = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin k\pi/2}{k} - \cancel{\frac{\sin 0}{k}} \right]^{0} + \frac{1}{\pi} \left[\cancel{\frac{\sin k\pi}{k}}^{0} - \frac{\sin k\pi/2}{k} \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin k(\pi/2)}{k} \right]$$

$k=1 \Rightarrow$	$\sin 1.\pi/2 = 1$	$k=1 \Rightarrow 2(1)-1$
$k=2 \Rightarrow$	$\sin 2\pi/2 = 0$	$k=2 \Rightarrow 2(1)$
$k=3 \Rightarrow$	$\sin 3\pi/2 = -1$	$k=3 \Rightarrow 2(2)-1$
$k=4 \Rightarrow$	$\sin 4\pi/2 = 0$	$k=4 \Rightarrow 2(2)$
$k=5 \Rightarrow$	$\sin 5\pi/2 = 1$	$k=5 \Rightarrow 2(3)-1$

$\rightarrow \quad k = 1, 2, \ldots$

$k=5 \Rightarrow \sin 5\pi/2 = 1 \qquad k=5 \Rightarrow 2(3)-1$

$\Rightarrow \quad k=1,2,\dots$

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} = -\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)}\right] = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^k}{2k-1}\right] \end{cases}$$

$$f(x) \approx 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cdot \cos(2k-1)x + b_k \sin kx = S(x)$$

med periodiskt fortsättning.

$$b_k = \langle f(x), \sin kx \rangle \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$= \int_0^{\pi/2} -1 \cdot \sin kx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin kx\,dx = \left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\cos k(\pi/2)}{k} - \frac{\cos k.0}{k}\right] + \left[-\frac{\cos k.\pi}{k} + \frac{\cos k\pi/2}{k}\right] =$$

$$= \frac{2\cos(k\pi/2)}{k} - \frac{1}{k}\left[\cos k.0 + \cos k\pi\right]$$

$$b_k = \frac{2\cos(k.\pi/2)}{k} - \frac{1}{k}\left[1 + \cos k\pi\right] \qquad k=1,2,\dots$$

$$k=1 \Rightarrow \frac{2\cos(\pi/2)}{1} - \frac{1}{1}\left[1+\cos\pi\right] = 0 - 1(1-1) = 0-0 = 0$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cos(2\pi/2)}{\cancel{2}} - \frac{1}{2}\left[1+\cos 2\pi\right] = (-1) - \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}) = -\frac{2}{1}$$

$$k=3 \Rightarrow \frac{2}{3}\cos(3\pi/2) - \frac{1}{3}\left[1+\cos 3\pi\right] = 0 - \frac{1}{3}(0) = 0$$

$$k=4 \Rightarrow \frac{2}{4}\cos\left(4.\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[1+\cos 4\pi\right] = \frac{1}{2}.1 - \frac{1}{4}.2 = 0$$

$$k=5 \Rightarrow \frac{2}{5}\cos\left(5\pi/2\right) - \frac{1}{5}\left[1+\cos 5\pi\right] = 0 - \frac{1}{5}\left[1-1\right] = 0$$

$$k=6 \Rightarrow \frac{2}{6}\cos(6\pi/2) - \frac{1}{6}\left[1+\cos 6\pi\right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}(2) = -\frac{2}{3}$$

Då $k = 2 \Rightarrow b_2 = -\frac{2}{1}$

$k = 6 \Rightarrow b_6 = -\frac{2}{3}$

$4k+2$, $k=0 \Rightarrow 2$
$k=1 \Rightarrow 6$

$\hookrightarrow 2k+1 \Rightarrow 2(0)+1 = 1 \quad k=0$
$\Rightarrow 2(1)+1 = 3 \quad k=1$

$$b_{4k+2} = \frac{-2}{2k+1} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Däremot

$$f(x) \simeq 0 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}\cos((2k-1)x) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((4k+2)x) = S(x) \quad (*)$$

ii) För att beräkna $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}$

ska vi använda seriensutveckling $(*)$

Anmärking: När $x=0$ $\quad S(x)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(f(0^-) + f(0^+)\right)$,

där för att $f(x)$ är inte kontinuerlig på $x=0$ (faktiskt är inte väldefinerad).

Då $S(0) = \frac{1}{2}\left(0 + (-1)\right) = -\frac{1}{2}$

Så $S(0) = 0 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} + \cancel{\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot 0}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}$$

□