Kommentarer_Tentan_LA

den 16 juni 2021 09:09

1) $V = \mathbb{R}^{n \times n} = \left\{ A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R}, \begin{matrix} i = 1, \dots n \\ j = 1, \dots n \end{matrix} \right\}$ ← Förlåt! Det var fel på film! Nu är det rätt

$M \subseteq V \quad M = \{ A_{n\times n} \in V \,/\, sp(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = 0 \}$

Bevisa att M är ett underrum av V

Lösning:

M är underrum av V om
- $u, v \in M \Rightarrow (u+v) \in M$
- $\alpha \in \mathbb{R}, u \in M \Rightarrow (\alpha u) \in M$

$$A, B \in M \subseteq V \Rightarrow sp(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = 0$$

$$sp(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = 0$$

? $sp(A+B)$

1) $A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

2) $sp(A+B) = sp([a_{ij}+b_{ij}]) = \sum_{k=1}^{n} (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$

$$= sp(A) + sp(B) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$$

Då $A+B \in M$.

? $sp(\alpha A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha A = [\alpha a_{ij}]^{n}_{\substack{i=1\\j=1}}$, $sp(\alpha A) = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_{kk} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$

$$= \alpha\, sp(A) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \alpha A \in M$.

Då är M ett underrum. □

2) $T: V \to W$ linjär avbildning. Visa att

Om $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ är linjärt Beroende, så är $\{T(v_1), T(v_2), \dots T(v_n)\}$ linjärt Beroende i W.

Lösning.

- $T: V \to W$ linjär avbildning.

$$\begin{cases} \text{.) } u, v \in V & T(u+v) = T(u) + T(v) \\ \text{.) } \alpha \in \mathbb{R},\ u \in V & T(\alpha u) = \alpha T(u) \end{cases}$$

- $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ linjärt Beroende: (HG sidan 18)

[$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ L.B om det finns icke trivial lösning]

Lemma 1.1 sidan 19

$\Leftrightarrow$ det finns en vektor v_k i $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ så att v_k är linjärkombination av de övriga.

$v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$ med $\beta_2, \dots, \beta_n$ icke trivial

$v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_{k+1} v_{k+1} + \dots + \beta_k v_k$

$\Big(\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 + \dots + -\alpha_n v_n \qquad v_1 = \underbrace{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}_{\beta_2} v_2 + \dots + \underbrace{-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}}_{\beta_n} v_n$

$T(v_1) = T(\beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) =$ T är linjärt.

$= \beta_2 T(v_2) + \dots + \beta_n T(v_n)$

$\boxed{w_1 = \beta_2 w_2 + \dots + \beta_n w_n}$ $\{w_1, w_2, \dots w_n\}$ L. Beroende.

$\in W$

Då är $\{T(v_1), \dots T(v_n)\}$ linjärt Beroende avsättning i W. $\square$

3

Låt $\mathbb{P}_2 = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ och $G = \{1, x, x^2\}$ standard bas av $\mathbb{P}_2$.

3.1) $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ $\quad p_1 = -4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) \quad p_2 = 2(x+\frac{1}{2})x \quad p_3 = 2x(x-\frac{1}{2})$

Hitta koordinaterna av p_1, p_2, p_3 i G = standard bas.

Lösning:

$\text{Span}\{1, x, x^2\} = \{w = \alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\text{Span}\{\heartsuit, \square, \Delta\} = \{w = \alpha \heartsuit + \beta \square + \gamma \Delta : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\text{Span}\{\heartsuit, \heartsuit, \heartsuit\} = \{w = \alpha \heartsuit + \beta \heartsuit + \gamma \heartsuit : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$:

$= \{w = (\alpha + \beta + \gamma) \heartsuit : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$$= \{ w = k\heartsuit \ , \ k = \alpha+\beta+\gamma \in \mathbb{R}$$

$$\text{Span}\{1, x, x^2\} = \text{Span}\{x^2, 1, x\} = \text{Span}\{x, x^2, 1\}$$

$$\underset{\text{}}{Bas_1} = \{1, x, x^2\} \neq \underset{\text{Bas}}{B_2 = \{x^2, 1, x\}} \neq \underset{\text{Bas}}{B_3 = \{x, x^2, 1\}}$$

$$P_1 = -4(x+\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) = -4(x^2 - \tfrac{1}{4}) = -4x^2+1 = -4(x^2) + 0(x) + 1(1)$$

$$= 1(1) + 0(x) - 4(x^2) \longleftrightarrow (1, 0, -4)_c$$

$$P_2 = 2(x+\tfrac{1}{2})x = 2(x^2 + \tfrac{1}{2}x) = 2x^2 + 1x = 0.(1) + 1.(x) + 2(x^2)$$

$$\longleftrightarrow (0, 1, 2)_c$$

$$P_3 = 2x(x-\tfrac{1}{2}) = 2(x^2 - \tfrac{1}{2}x) = 2x^2 - x = 0(1) - 1(x) + 2(x^2)$$

$$\longleftrightarrow (0, -1, 2)_c$$

3.2) $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\} = \{-4x^2+1, \ 2x^2+x, \ 2x^2-x\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_c , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_c , \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_c \right\}$$

Bevisa att $\mathcal{B}$ är en Bas för $\mathbb{P}_2$.

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \{p_1, p_2, p_3\} \text{ är linjärt Oberoende} \\ \bullet \ \text{Span}\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbb{P}_2 \ \circledast \end{array} \right.$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \# B = \dim \mathbb{P}_2 \\ B \text{ l. Oberoende} \end{array} \right)$ då är B också en Bas till $\mathbb{P}_2$.

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \vec{0} \qquad (\vec{0} = 0.1 + 0.x + 0.x^2)$$

$$\alpha(-4x^2+1) + \beta(2x^2+x) + \gamma(2x^2-x) = 0 = 0.1 + 0.x + 0.x^2$$

$$(-4\alpha + 2\beta + 2\gamma)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\alpha).1 = 0.1 + 0x + 0x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} -4\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 & & \\ \beta - \gamma = 0 & \Rightarrow & \boxed{\beta = \gamma} \\ \alpha = 0 & \Rightarrow & \boxed{\alpha = 0} \end{array} \right.$$

$$-4(0) + 2\gamma + 2\gamma = 0 \Rightarrow 0 + 4\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

$$\Rightarrow \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$\Rightarrow \quad \beta = \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 0}$

Då är $\alpha = \beta = \gamma = 0$ endast lösning.

Då är $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ linjärt Oberoende.

Då är B också en Bas för $\mathbb{P}_2$, där för att

$$\# B = \dim \mathbb{P}_2 = 3.$$

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$ $\qquad p_1 = \alpha p_1 + \cancel{\beta p_2} + \cancel{\gamma p_3} = 1 p_1 + 0 p_2 + 0 p_3$

$$p_1 \leftrightarrow (1, 0, 0)_B$$

3.3 Övergångsmatrisen (Basbytematris)

$B = \{p_1, p_2, p_3\}$

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = w \leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma)_B$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_C + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_C + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{} \longleftrightarrow (w)_C$$

$$\alpha [p_1]_C + \beta [p_2]_C + \gamma [p_3]_C \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_C$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{[w]_B} = & \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{[w]_C} \\ [p_1]_C \quad [p_2]_C \quad [p_3]_C & & \end{array}$$

$B = \{p_1, p_2, p_3\} \qquad [p_1]_B = (1, 0, 0)_B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{M_C^B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[p_1]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{[p_1]_C}$$

'C'

$M^B_C [w]_B = [w]_C$ $\qquad \boxed{M^C_B = (M^B_C)^{-1}}$

$[w]_B = (M^C_B)[w]_C$

4) Bestäm den förstagrad polynom $p(t)$ som minimerar

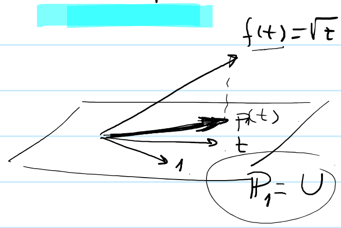
$$\int_0^1 (\sqrt{t} - p(t))^2 dt = \langle f(t)-p(t), f(t)-p(t)\rangle = \| \underbrace{f(t)-p(t)}_{h(t)}\|^2$$

Lösning. $p(t)$ = förstagrad polinom $\therefore$ $p(t) = \alpha \cdot 1 + \beta t$ $\quad p(t) \in \mathbb{P}_1 = \text{Span}\{1, t\}$,
$B = \{1, t\}$ bas.

$f(t) = \sqrt{t} \neq p(t)$ men $f(t) \equiv$ kontinuerlig på $I = [0,1]$

- $V = C[0,1]$ $\qquad U = \mathbb{P}_1([0,1])$

V = vektorrum $\qquad U$ = underrum. $\subseteq V$



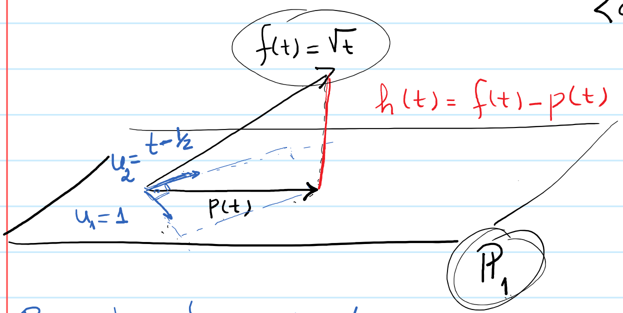
- minimerar avstånd $\Rightarrow$
  - minstakvadrat metoden
  - projektion.
  - ortogonal projektion i ett underrum (*)

- $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

$$(f,g) \to \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

Skalär produkt:

$$\langle g, g\rangle = \int_0^1 g^2(t)\,dt = \|g\|^2$$



$\mathbb{P}_1 = \text{Span}\{u_1, u_2\} = \text{Span}\{1, t\}$

Men $\langle 1, t\rangle \neq 0$

$$\langle 1, t\rangle = \int_0^1 1 \cdot t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Komma ihåg

$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

$(u, v) \to \langle u, v\rangle = \alpha \in \mathbb{R}$

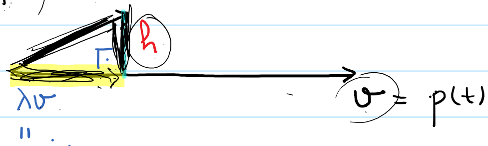
- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
- $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$
- $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$
- $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\boxed{\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}}$ (*) (*)

(*) $\boxed{\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v}$

Projektion

Projektion

($\sqrt{t} = f(t)$) $= u$



$$\lambda v \;\Big\|\; \text{proj}_v u$$

⊛ $\boxed{\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v}$

- $\lambda v + h = u \Leftrightarrow$

$$\boxed{h = u - \lambda v}$$

$$\boxed{h = u - \text{proj}_v u}$$

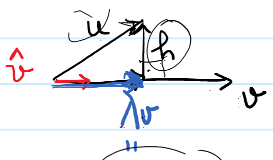
- $\{\text{proj}_v u, h, u\}$ Linjärt Beroende

men $\{\text{proj}_v u, h\}$ linjärt Oberoende * $\{\text{proj}_v u, h\}$ ortogonal Bas

$\{\text{proj}_v u, u\}$ linjärt Oberoende $\qquad U = \mathbb{P}_1$

$\{u, h\}$ linjärt Oberoende

- För att beräkna $\text{proj}_v u$.



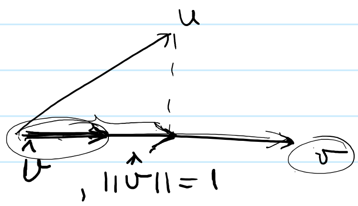
$$\boxed{u = \lambda v + h}$$

$$\langle u, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle + \underbrace{\langle h, v\rangle}_{=0 \text{ ortogonal komponent}}$$

$$\langle u, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}}$$

Då är $\quad \text{proj}_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$



Anmärkning: $\boxed{\hat{v} = \dfrac{v}{\|v\|} \text{ enhetsvektor parallell till } v}$ $, \|\hat{v}\| = 1$

$$\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1$$

Då är: $\quad \text{proj}_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|} \dfrac{v}{\|v\|} =$

$$= \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, \hat{v}\rangle}{\underbrace{\langle \hat{v}, \hat{v}\rangle}_{= 1^2 = 1}} \hat{v} = \text{proj}_{\hat{v}} u$$

1) $\{1, t\}$ → ortogonal Bas till P_1

$\{1, t\} \longrightarrow \{\underset{u_1}{\overset{\|}{1}}, u_2\}$