Lösningar till Matematisk Analys, del 2, (MVE545) 2020-05-30

1. **a)** $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$, **b)** Alternativ iv) är en linjär (andra ordningens) ODE, ty är på formen $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = f(x)$, **c)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \Big[x + \frac{sin(2x)}{2}\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{2}$, **d)** A$=\int_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{x}\,dx$, **e)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos x + \sin x)\frac{x(x+2)}{x+2}\,dx =$ ty $x\cos x$ är udda och $x\sin x$ är jämn $= 2\int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx = 2(\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}\cos x\,dx) = 2(-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/4}) = \sqrt{2}(1-\frac{\pi}{4})$, **f)** $y^2y' = x^2y^2$ har lösning $y=0$ och om $y\neq 0$ så får vi $y' = x^2$ som då ger att också $y = \frac{x^3}{3} + C$ där $C\in\mathbb{R}$, är lösningar, **g)** $\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x}\,dx = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x}\,dx \equiv I_1 + I_2$. För $0 < x < 1$ gäller $0 < \frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ och då $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent enligt sats så ger Jämförelsekriteriet för positiva integrander att även $I_1 = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x}\,dx$ är konvergent. På samma sätt då ju för $1 < x < \infty$ gäller, då exponentialfunktioner (med positiv exponent naturligtvis) växer snabbare än alla polynom då x går mot oändligheten, för tillräckligt stora x, att $0 < \frac{x}{\sqrt{x^3+x}}e^{-x} < \frac{1}{x^2}$, så att vi har att I_2 är konvergent. Alltså är $I = I_1 + I_2$ konvergent.

2. **a)** $\int x(4x^2+3)\,dx = \int 4x^3 + 3x\,dx = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$, **b)** $\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} = -(\ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$, **c)** $\int x^2\ln x\,dx = \Big[\text{PI}\Big] = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{3^2} + C$, **d)** $\int\frac{2x}{x^2+x-2}\,dx = \int\frac{2x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \Big[\text{'PBU'}\Big] = \int\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\,dx = \Big[\text{'HP'}\Big] = \int\frac{2/3}{x-1} + \frac{4/3}{x+2}\,dx = \frac{2}{3}(\ln|x-1| + 2\ln|x+2|) + C$, **e)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \Big[\text{'Listan'}\Big] = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$, **f)** $\int\cos x(\cos x + \sin x)\,dx = \int\cos^2 x\,dx + \frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx = \int\frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx - \frac{\cos(2x)}{4} = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$.

3. Ekvationerna är linjära så lösningarna y ges av $y = y_p + y_h$ där homogenlösningarna y_h är de samma för alla fallen och ges av att karakteristiska ekvationen $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ har en dubbelrot $r_{1,2} = 1$ så att $y_h = (C_1x + C_2)e^x$. För a) ansätter vi $y_p = x^k(ax+b) = \Big[k=0\Big] = ax+b$, så att $y_p' = a,\ y_p'' = 0$ och insättning ger $x = y_p'' - 2y_p' + y_p = -2a + ax + b$ och identifikation av koefficienter i de två polynomen i likheten ger $a = 1,\ b = 2$ så att $y_p = x+2$, För b) ansätter vi $y_p = x^kCe^{-x} = \Big[k=0\Big] = Ce^{-x}$ och som i a) ger derivering, insättning, och här även förkortning med e^{-x} på båda sidor i ekvationen, samt identifikation av koefficienter att $C = 1/4$ så att alltså $y_p = \frac{1}{4}e^{-x}$. I fall c) ansätter vi $y_p = x^kCe^x = \Big[k=2\Big] = Cx^2e^x$. Återigen ger derivering, insättning, och här även förkortning med, i detta fall, e^x på båda sidor i ekvationen, samt identifikation av koefficienter att $C = 1/2$ så att alltså $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. Slutligen ansätter vi i fallet d) en partikulärlösning $y_p = x^k(ax+b)e^x = \Big[k=2\Big] = (ax^3 + bx^2x^2)e^x$. Samma strategi som i föregående fallen tillämpas nu. Vi gör i detta fall som exempel alla räkningarna (som vi mestadels skippade ovan): $y*_p = (3ax^2 + 2bx)e^x + y_p$, $y_p'' = (6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx)e^x + y_p' = (6ax + 2 + 2(3ax^2 + 2bx))e^x + y_p$. Insättning ger nu $xe^x = y_p'' - 2y_p' + y_p = (6ax^2 + (6a+4b)x + 2b)e^x + y_p - 2((3ax^2 + 2bx)e^x + y_p) + y_p = (6ax + 2b)e^x$ och identifikation av koefficienter ger $a = 1/6,\ b = 0$ så att $y_p = \frac{1}{6}x^3e^x$.

4. Division och sedan kvadratkomplettering i nämnaren ger $\frac{x^3 - x^2 + 3x}{x^2 - x + 2} = x + \frac{x}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = x + \frac{4}{7}\frac{x}{(\frac{2}{\sqrt{7}}x - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1}$. Integration ger $\int\frac{x^3 - x^2 + 3x}{x^2 - x + 2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}\int\frac{x}{(\frac{2}{\sqrt{7}}x - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1}\,dx = \Big[t = \frac{2}{\sqrt{7}}x - \frac{1}{\sqrt{7}}\Big] = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}(t + \frac{1}{\sqrt{7}})}{t^2+1}\frac{\sqrt{7}}{2}\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan t + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{7}(2x-1)^2 + 1) + \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}) + C$.

5. ODE:n $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{x^2+1}$ är linjär med IF: $e^{\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$ som efter multiplikation av ekvationen ger $\frac{d}{dx}((x^2+1)y) = x \Leftrightarrow (x^2+1)y = \frac{x^2}{2} + C$ som ger att lösningarna y ges av $y = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}$ och begynnelsevärdena ger a) $1 = y(0) = C$ respektive b) $0 = y(0) = C$.

6. För $x > 0$ har vi $\dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_x^{x^2} (\ln t)^2\, dt) = \dfrac{d}{dx}(\displaystyle\int_c^{x^2} (\ln t)^2\, dt \ - \int_c^{x} (\ln t)^2\, dt) = 2x(\ln x^2)^2 - (\ln x)^2 = 8x(\ln x)^2 - (\ln x)^2 =$ $= (8x-1)(\ln x)^2$.

7. Ekvationen är en fjärde ordningens inhomogen linjär ODE så lösningarna y ges som $y = y_p + y_h$. Då ekvationen har konstanta koefficienter så får vi homogenlösningarna genom att lösa den karakteristiska ekvationen $0 = r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = (r-1)^3(r+1)$ såp att vi får att $y_h = (C_2x^2 + C_1x + C_0)e^x + De^{-x}$. För att finna y_p ansätter vi $y_p == x^k(ax+b)$ där vi kan ta $k = 0$. Derivering och insättning i ekvationen ger $x = y_p^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y_p' - y_p = 2a - (ax+b)$ och identifikation av koefficienter ger $a = -1$ och $b = -2$ så att $y_p = -x-2$. Alltså har vi att $y = -x - 2 + (C_2x^2 + C_1x + C_0)e^x + De^{-x}$, där $C_0, \ldots, D$ är godtyckliga konstanter.

8. Kirchoffs spänningslag ger $RI + L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = V(t) = RQ' + LQ'' + \dfrac{1}{C}Q$ vilket med uppgiftens givna värden ger $Q'' + 5Q' + \dfrac{9}{4}Q = \dfrac{25}{4}te^{-t}$ vilket är en linjär ODE så att lösningarna Q ges av summan av en partikulärlösning Q_p och alla homogenlösningar Q_h; $Q = Q_p + Q_h$. Lösa den karakteristiska ekvationen ger att $Q_h = C_1e^{-\frac{1}{2}t} + C_2e^{-\frac{9}{2}t}$. För Q_p ansätt $Q_p = t^k(at+b)e^{-t}$ där vi genom att jämföra med Q_h ser att vi kan ta $k = 0$ så att $Q_p = (at+b)e^{-t}$. Derivering och insättning i ekvationen ger $Q_p' = ae^{-t} - Q_p$ och $Q_p'' = -2ae^{-t} + Q_p$ så att $\dfrac{25}{4}te^{-t} = Q_p'' + 5Q_p' + \dfrac{5}{4}Q_p = (3a - \dfrac{7}{4}b)e^{-t} - \dfrac{7}{4}ate^{-t}$ och identifikation av koefficienter ger $a = -\frac{25}{28}$ och $b = -\frac{300}{196}$. (Det blev ett litet fel i värdena för kretsens komponenter givna i uppgiften vilket betyder att det tyvärr blev 'grisiga' värden; men metoden är densamma och det, metoden, var det som bedömdes i rättningen av uppgiften).

9. Högerledet är inte av en typ där vi lätt gissar partikulärlösning. Vi faktoriserar då operatorn med hjälp av den karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ som ger $(D+1)^2y = e^{-x}\arctan x$ och ekvationssystemet $(D+1)y \equiv z$, $(D+1)z = e^{-x}\arctan x$ som båda är första ordningens linjära ekvationer och löses med integrerande faktor (som för båda ekvationerna i detta fallet) är e^x. För z får vi då $\dfrac{d}{dx}(e^xz) = e^xe^{-x}\arctan x = \arctan x$ som ger $e^xz = \displaystyle\int \arctan x\, dx = [PI] = x\arctan x - \int x\frac{1}{x^2+1}\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$, som ger z efter division med e^x. På samma sätt löses den första ordningens linjära ekvationen för y med (samma i detta fall) integrerande faktor vilket ger $e^xy = \displaystyle\int x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1\, dx$ och efter partialintegration fås $y = e^{-x}(\dfrac{1}{2}(x^2-1)\arctan x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) + Ax + B)$ där A och B är godtyckliga konstanter.

10. a) Ja, det gäller ju enligt huvudsatsen; t ex kan man ta som sökt funktion (enligt huvudsatsen) $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\, dx$ och då gäller alltså $F'(t) = f(t)$ så att integration ger $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b F'(t)\, dt = \Big[F(t)\Big]_a^b$, b) Tag t ex funktionen som är 1 på intervallet $[1,2]$ och 2 på intervallet $(2,3]$. Integralen av denna funktion existerar ju på intervallet $[1,3]$ men funktionen är ju inte kontinuerlig på intervallet, c) T ex funktionen $f(x)$ på intervallet $[0,1]$ definierad som 0 för de punkter i intervallet som är rationella tal och 1 för de punkter i intervallet som är irrationella tal; då existerar inte (Riemann)integralen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.