

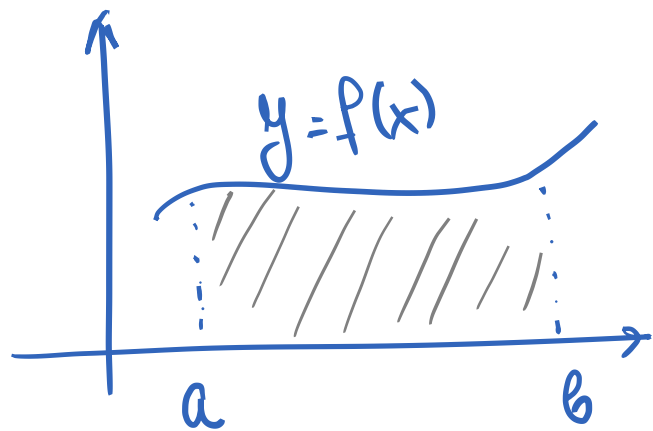
Föreläsning 1

MVE545

Area, bestämd integral,
Repetition av primitiv funktion

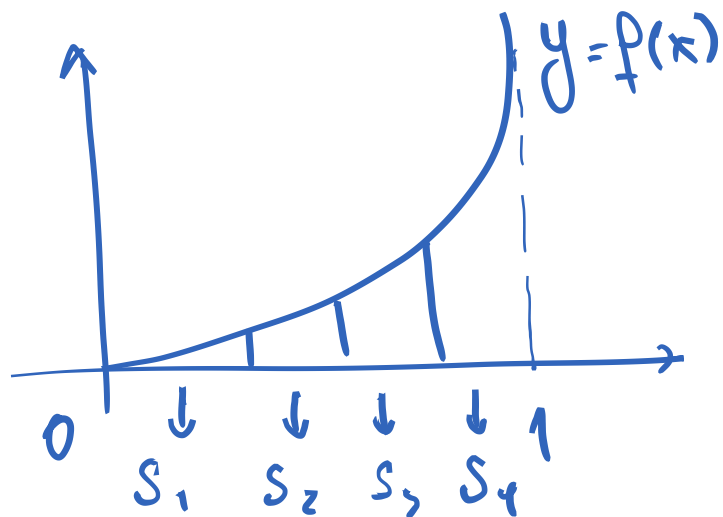
Area. Bestämning integral

Inledning: bestämt area av ett område S som ligger under kurvan $y = f(x)$ och mellan $x = a$ och $x = b$.

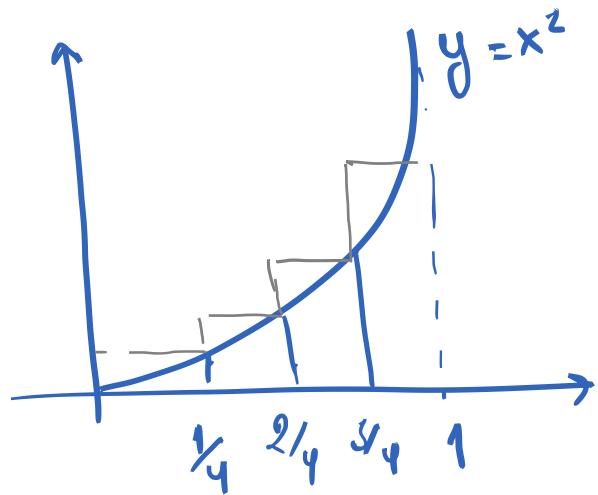


Vad är meningen av area?

S triangel, rektangel, polygon - vi kan beräkna area, men vad händer om sidorna är inte raka?



$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$



A area

$A < R_4$

R_4 övregräns

(övertappar)

Varje S_i approximeras med rektangel

area av rektangel: $\frac{1}{4} \cdot f(x_i)$, x_i höger ändpunkt

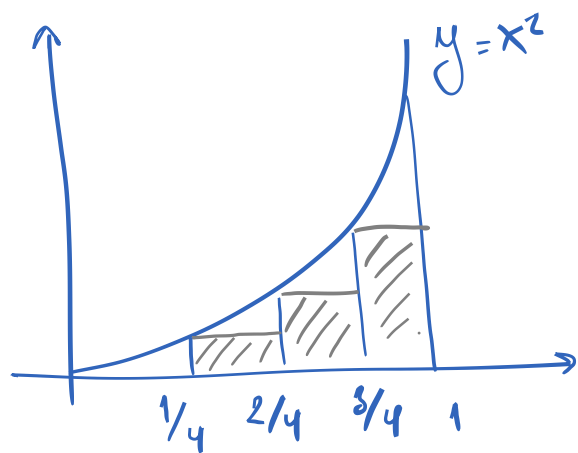
$$S_1 \sim \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$S_2 \sim \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2$$

$$S_3 \sim \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$S_4 \sim \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4^3} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \end{aligned}$$



r_4 undertrepper

$$r_4 < A < R_4$$

tynnare rektangler $\rightarrow$ bedre
approximation av A

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

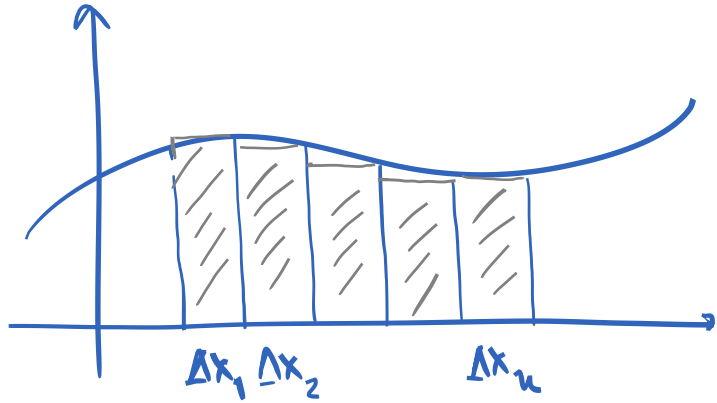
I vår eksempel: $R_n = \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$

oel $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

oel $A = \frac{1}{3}$

I allmän fall, $R_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$



Definition: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$

f kontinuerlig $\Rightarrow$ gränsvärdet existerar

Exempel 1: $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

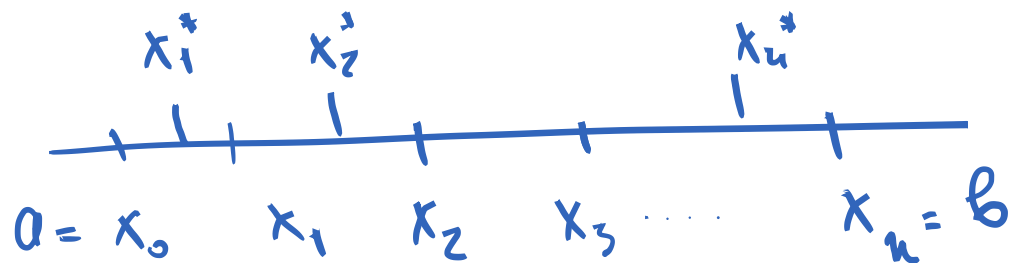
Exempel 2: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $1 \leq x \leq 3$

Beständ integral

f definierad på intervallet $[a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

$$x_i^* = [x_{i-1}, x_i]$$



Obs. $\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Beständ integral av funktion f över intervallet $[a, b]$ är

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Om gränsvärdet existerar och har samma värde för alla val av punkter $x_1^*, \dots, x_n^*$. Då funktionen f är integrerbar.

$$\int_a^b f(x) dx$$

a, b - undre/övre integrationsgräns

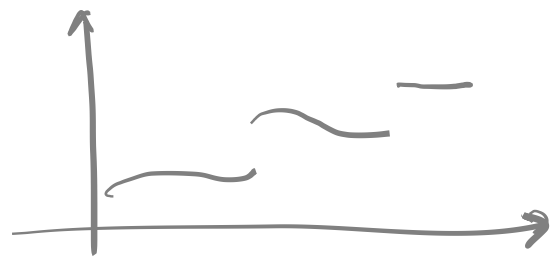
$f(x)$ - integrand

x - integrations variabel

Obs: Obestämd integral - funktion
bestämd integral - tal

Obs: Endast integrerbara
funktioner har integral.

Sats: Om funktion f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ eller
om f är styckvis kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, då $\int_a^b f(x) dx$
existerar.



styckvis kontinuerlig

Räkningeregler för den bestämda integralen

1: If $a = b$, then $\int_a^a f(x) dx = 0$

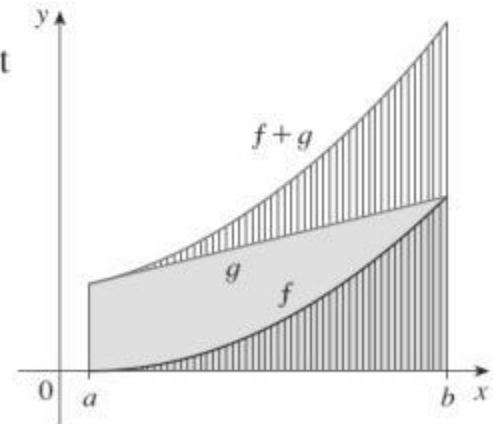
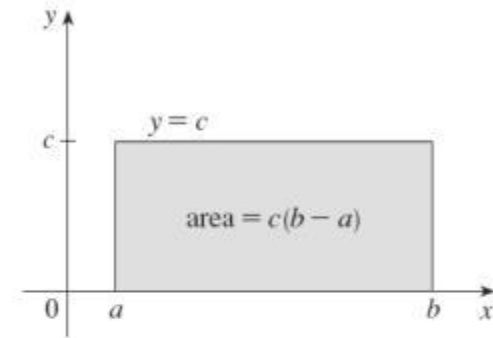
2: $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

3: $\int_a^b c dx = c(b - a)$, where c is any constant

4: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

5: $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, where c is any constant

6: $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$



Jämförelse regler för den bestämda integralen

1. Om $f(x) \geq 0$ för $x \in [a, b]$, då $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. Om $f(x) \geq g(x)$ för $x \in [a, b]$, då $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
3. Om $m \leq f(x) \leq M$ för $x \in [a, b]$, då
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$