Uppgift 1.2

den 14 april 2021 09:54

I ett (slumpmässigt) urval av 75 broar i en stat har 30 svagheter. Uppskatta sannolikheten att nästa (slumpmässigt) urvalda bro har svagheter.

Lösning:

$$P(\text{nästa svagheter}) \approx \frac{30}{75}$$

Uppgift 1.4

En fabrik tillverkar bromsklossar för att användas till Fordbilar. I ett visst parti av 50 bromsklossar finns det 2 med ojämnheter. Om 1 av dessa 50 bromsklossar väljs ut slumpmässigt för att monteras i din bil, vad är då sannolikheten att en ojämn bromskloss monteras i din bil?

Lösning:

$$P(\text{din bil har ojämn bromskloss}) = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

Uppgift 1.8

Ett missilbatteri kan avfyra 5 missiler i snabb följd. När målet har träffats upphör skjutandet. Låt h = hit, m = miss.

a) Rita trädet över möjliga skjutsekvenser mot ett inkommande mål.

b) Jämför med 1.2.3. Skillnader?

c) Lista de möjliga utfallen genererade av trädet.

d) Lista utfallen som utgör händelserna

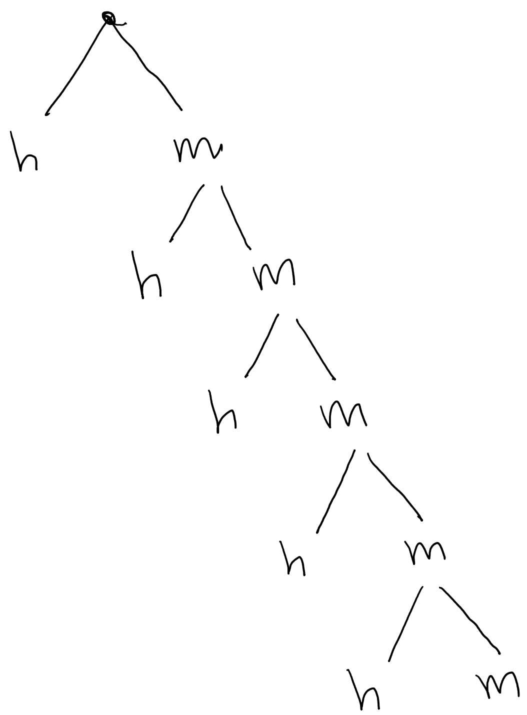
A_1: exakt två skott avfyras

A_2: högst två skott avfyras

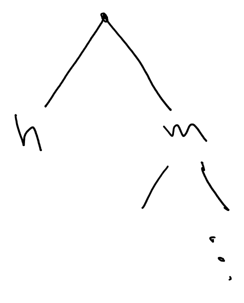
Är A_1 och A_2 ömsesidigt uteslutande?

Lösning:

a)



b)



c)

S = {h, mh, mmh, mmmh, mmmmh,

mmmmmm}

d) $A_1 = \{mh\}$

$A_2 = \{h, mh\}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$? $mh \in A_1$, $mh \in A_2$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

Uppgift 1.14

Lagringsenheterna i en dator kallas bits och kan anta värdena 0 eller 1. För att lagra bilder kodas dessa som pixlar, där varje pixel har en färg. Till exempel, en pixel med färg i en gråskala med fyra gråa toner kan kodas med två bits genom att koda den som 00, 01, 10 eller 11 (00 = svart, 11 = vit)

a) Hur många olika färger kan kodas med 4 bits?

b) Hur många bits behövs det för att kunna koda 32 olika färger?

Lösning:

a)

0/1

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

b) n bits $\rightsquigarrow$ 2^n färger

$$2^n = 32 \qquad \rightsquigarrow \qquad n = 5$$
$$32 = 2^5$$

Uppgift 1.18

En entreprenör har 8 leverantörer att välja mellan för att köpa elektronik. Han/hon väljer ut 3 av dessa slumpmässigt och ber dessa 3 att skicka över offerter för projektet.
Hur många olika val kan han/hon göra?
Om du är en av leverantörerna, vad är då sannolikheten att du får skicka över en offert?

Lösning:

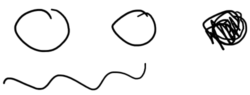
$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3\cdot 2}} = 8\cdot 7 = 56$$

totala utfall = 56

gynnsamma utfall = ?

A = { du får skicka över en offert }

$$P(A) = \frac{\#\text{ gyn. utfall}}{\#\text{ total utfall}}$$



bland 7 resterande

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 7\cdot 3 = 21$$

$$P(A) = \frac{21}{56} = \frac{\cancel{7}\cdot 3}{4\cdot \cancel{7}\cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$P(A^c) = \frac{\cancel{7}}{8}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\cdot\frac{5}{\cancel{6}} = \frac{5}{8} \rightsquigarrow P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

Extra: Välj 4 av 8.

$$P(A^c) = \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\cdot\frac{4}{\cancel{5}} = \frac{4}{8} \rightsquigarrow P(A) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$$

Uppgift 1.22

Ett företag får en leverans på 20 hårddiskar. Innan leveransen accepteras kontrolleras kvalitén genom att 5 av dessa slumpmässigt väljs ut för att kvalitetstestas. Om dessa 5 fungerar accepteras leveransen. Om inte alla 5 fungerar returneras alla 20 hårddiskar. Om 3 utav dessa 20 är defekta, vad är då sannolikheten att leveransen returneras?

Lösning:

$$P(\text{returneras}) = 1 - P(\text{accepteras})$$

$$P(\text{accepteras}) = \frac{\cancel{17}}{20} \cdot \frac{\cancel{16}}{19} \cdot \frac{15}{18} \cdot \frac{14}{\cancel{17}} \cdot \frac{13}{\cancel{16}} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 7 \cdot 13}{\cancel{5} \cdot \cancel{4}_{2} \cdot 19 \cdot \cancel{3} \cdot 6} =$$

$$= \frac{7 \cdot 13}{2 \cdot 19 \cdot 6} = \frac{91}{228}$$

$$\Rightarrow P(\text{returneras}) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{228-91}{228} = \frac{137}{228} \approx 0.6$$

Alternativ lösning:

$$P(\text{returneras}) = 1 - P(\text{accepteras}) = 1 - \frac{\#\text{gyn. utfall}}{\#\text{totala utfall}}$$

$$\#\text{totala utfall} = \binom{20}{5}$$

$$\#\text{gyn. utfall} = \binom{17}{5}$$

$$\Rightarrow P(\text{returneras}) = 1 - \frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = 1 - \frac{\frac{17!}{5!(17-5)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}} =$$

$$= 1 - \frac{17!}{\cancel{5!}\underbrace{(17-5)}_{12}!} \cdot \frac{\cancel{5!}\,15!}{20!} = 1 - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18}$$

$$\approx 1 - 0{,}4 = 0.6$$

Uppgift 2.2

Stölder av värdefulla metaller är ett allvarligt problem. De uppskattade sannolikheterna att en given stöld involverar en viss metall är:

Tenn:	1/35	Platinum:	1/35	Nickel:	1/35
Stål:	11/35	Guld:	5/35	Zink:	1/35
Koppar:	8/35	Aluminium:	2/35	Silver:	4/35
Titan:	1/35				

En stöld involverar bara en metall.

a) Vad är sannolikheten för en guld-, silver- eller platinumstöld?

b) Vad är sannolikheten för att stål inte ingår i en viss stöld?

Lösning:

a) $P(\{\text{guldstöld}\} \cup \{\text{silverstöld}\} \cup \{\text{platinumstöld}\}) =$

$$= P(\text{guldstöld}) + P(\text{silverstöld}) + P(\text{platinumstöld})$$

$$= \frac{5+4+1}{35} = \frac{10}{35} = \frac{\cancel{5} \cdot 2}{\cancel{5} \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

b) $P(\{\text{stålstöld}\}^c) = 1 - P(\{\text{stålstöld}\}) =$

$$= 1 - \frac{11}{35} = \frac{35-11}{35} = \frac{24}{35}$$

Uppgift 2.4

Motorn i ett rymdskepp består av två parallella enheter, en huvudmotor och en reservmotor. Huvudmotorn fungerar med 95% sannolikhet. Reservmotorn fungerar med 80% sannolikhet. Motorn som helhet fungerar med 99% sannolikhet.

a) Vad är sannolikheten att båda enheterna fungerar?

b) Vad är sannolikheten att endast reservmotorn fungerar?

c) Vad är sannolikheten att endast huvudmotorn fungerar?

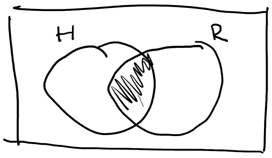
d) Vad är sannolikheten att motorn som helhet inte fungerar?

Lösning:

$H = \{\text{huvudmotorn fungerar}\}$

$R = \{\text{reservmotorn fungerar}\}$

$M = \{\text{Motorn fungerar}\} = H \cup R$



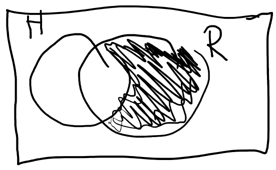
a) Sökt: $P(H \cap R)$

$$P(H \cup R) = P(H) + P(R) - P(H \cap R)$$

$$0.99 = 0.95 + 0.8 - P(H \cap R)$$

$$\Leftrightarrow P(H \cap R) = 0.95 + 0.8 - 0.99 = 0.76$$

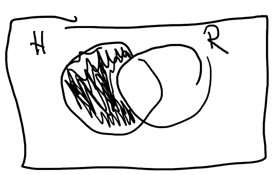
b) Sökt: $P(H^c \cap R)$



$$P(H^c \cap R) = P(R) - P(H \cap R) =$$

$$= 0.8 - 0.76 = 0.04$$

c) Sökt: $P(H \cap R^c)$



$$P(H \cap R^c) = P(H) - P(H \cap R) =$$

$$= 0.95 - 0.76 =$$

$$= 0.19$$

d) Sökt: $P(M^c)$

$P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.99 = 0.01$

Uppgift 2.6

När en dator kraschar är det 75% sannolikhet att det är överbelastning och 15% sannolikhet att det är ett mjukvaruproblem. Det är 85% sannolikhet att det är överbelastning eller mjukvaruproblem.

a) Vad är sannolikheten att det är både överbelastning och mjukvaruproblem som orsakar en kraschen?

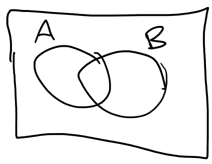
b) Vad är sannolikheten att det är mjukvaruproblem men inte överbelastning som orsakar en krasch?

Lösning:

$A = \{\text{överbelastning}\}$, $B = \{\text{mjukvaruproblem}\}$

$P(A) = 0.75$

$P(B) = 0.15$



a) Sökt: $P(A \cap B)$

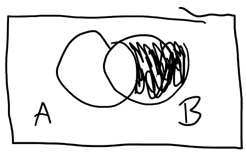
$P(A \cup B) = 0.85$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.75 + 0.15 - 0.85 =$

$= 0.05$

b) Sökt: $P(A^c \cap B)$



$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0.15 - 0.05 = 0.1$

Uppgift 2.14

Samma situation som i 2.4.

a) Vad är sannolikheten att reservmotorn fungerar om huvudmotorn går sönder?

b) Är det sant att

P(reservmotorn fungerar) = P(reservmotorn fungerar | huvudmotorn går sönder)

Förvånande?

Lösning:

$H = \{\text{huvudmotorn fungerar}\}$

$R = \{\text{reservmotorn fungerar}\}$

$M = \{\text{Motorn fungerar}\}$

a) Sökt: $P(R \mid H^c)$

$$P(R \mid H^c) = \frac{P(R \cap H^c)}{P(H^c)} = \frac{0.04}{0.05} = \frac{4}{5} = 0.8$$

b) Sökt: Är $P(R) = P(R \mid H^c)$?

$P(R) = 0.8, \quad P(R \mid H^c) = 0.8$

Def: A_1, A_2 oberoende: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

$A_1 = H, \quad A_2 = R$

$$\left.\begin{aligned} P(H) &= 0.95 \\ P(R) &= 0.8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(H)P(R) = 0.76$$

$P(H \cap R) = 0.76$

$\rightsquigarrow P(H \cap R) = P(H)P(R)$

$\rightsquigarrow H, R$ är oberoende.

Uppgift 2.20

Samma situation som i 2.14. Låt

A_1: reservmotorn fungerar

A_2: huvudmotorn fungerar inte.

Är händelserna A_1 och A_2 oberoende?

Lösning:

$$A_1 = R, \quad A_2 = H^c$$

Sökt: Är $P(H^c \cap R) = P(H^c)P(R)$?

$$P(H^c) = 0.05$$

$$P(R) = 0.8$$

$$\boxed{\text{Def: } P(\hat{A}_2 \mid \hat{A}_1) = \frac{P(\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2)}{P(\hat{A}_1)}}$$

$$\hat{A}_2 = R, \quad \hat{A}_1 = H^c$$

Def $\rightsquigarrow$ $P(R \mid H^c)P(H^c) = P(H^c \cap R)$

klara om $P(R \mid H^c) = P(R)$

Samma som 2.14 $\rightsquigarrow$ sant!

Uppgift 2.24

De vanligaste vattenföroreningarna är organiska. Det mesta organiska materialet bryts ned av bakterier som behöver syre, ett överskott av organiskt material kan resultera i brist på syre. Låt BOD beteckna syrebehovet för bakterier. I floder nära en industri hade 35% högt BOD, 10% var sura och 40% av de sura hade högt BOD. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald flod både är sur och har högt BOD?

Lösning:

$$P(\{\text{Högt BOD}\}) = 0.35$$

$$P(\{\text{Sur}\}) = 0.1$$

$$P(\{\text{Högt BOD}\} | \{\text{Sur}\}) = 0.4$$

Sökt: $P(\{\text{Högt BOD}\} \cap \{\text{sur}\})$

Def av beting. sannolikhet $\rightsquigarrow$ $P(\{\text{Högt BOD}\} | \{\text{sur}\}) = \dfrac{P(\{\text{Högt BOD}\} \cap \{\text{sur}\})}{P(\{\text{sur}\})}$

$$\Rightarrow P(\{\text{Högt BOD}\} \cap \{\text{Sur}\}) = 0.1 \cdot 0.4 = 0.04$$

Uppgift 2.30

den 14 april 20.. 10:5.

Antag att det är 50% sannolikhet för skada på hårddisken i en dator om datorn är kopplad till en elledning som blir träffad av ett åsknedslag. Antag att det är 5% sannolikhet för åska på en sommardag och att det är 0.1% sannolikhet för att åskan slår ned i elledningen. Vad är sannolikheten att åskan slår ned i elledningen och att hårddisken skadas under nästa åskoväder?

Lösning:

$$P(\{\text{skada}\} | \{\text{åsknedslag}\}) = 0.5$$

$$P(\{\text{åska}\}) = 0.05$$

$$P(\{\text{åsknedslag}\} | \{\text{åska}\}) = 0.001$$

Sökt: $P(\{\text{åsknedslag}\} \cap \{\text{skada}\} | \{\text{åska}\})$

$$\boxed{\text{Def}: P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \iff P(A_1)P(A_2|A_1) = P(A_1 \cap A_2)}$$

modif.

$\rightsquigarrow P(\{\text{åsknedslag}\} \cap \{\text{skada}\} | \{\text{åska}\}) =$

$\boxed{\begin{matrix} A_1 = \text{åsknedslag} \\ A_2 = \text{skada} \end{matrix}}$

formel

$= P(\{\text{åsknedslag}\} | \{\text{åska}\}) \times$

se

$\times P(\{\text{skada}\} | \{\text{åsknedslag}\}, \{\cancel{\text{åska}}\})$

$= P(\{\text{åsknedslag}\} | \{\text{åska}\}) P(\{\text{skada}\} | \{\text{åsknedslag}\})$

$= 0.001 \cdot 0.5 = 0.0005$

A_1, A_2, A_3

$$P(A_2 | A_1, A_3) = \frac{P(A_1 \cap A_2 | A_3)}{P(A_1 | A_3)}$$

$$\iff P(A_1|A_3)P(A_2|A_1, A_3) = P(A_1 \cap A_2 | A_3)$$

Uppgift 2.32

den 14 april 2020 10:53

Låt A_1 och A_2 vara ömsesidigt uteslutande händelser som uppfyller $P(A_1)P(A_2) > 0$. Visa att A_1 och A_2 inte är oberoende.

<u>Lösning:</u>

Sökt: Är $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$?

A_1, A_2 uppfyller $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\rightsquigarrow P(A_1 \cap A_2) = 0$

Antagande: $P(A_1)P(A_2) > 0$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 0 < P(A_1)P(A_2)$

$\therefore$ Nej, de är inte oberoende.

Uppgift 2.36

den 14 april 20[illegible] [illegible]:53

50% av alla producerade datorchip är defekta. Inspektioner säkerställer att endast 5% av de som säljs lagligt är defekta. 1% av alla producerade datorchip blir stulna innan inspektion. Vad är sannolikheten att ett datorchip är stulet givet att det är trasigt?

Lösning:

Sökt: $P(\{\text{stulet}\} \mid \{\text{trasigt}\})$

Antagande: $P(\{\text{trasigt}\} \mid \{\text{stulet}\}) = 0.5$

$P(\{\text{trasigt}\} \mid \{\text{stulet}\}^c) = 0.05$

$$\{\text{trasigt}\} = \left(\{\text{trasigt}\} \cap \{\text{stulet}\}\right) \cup \left(\{\text{trasigt}\} \cap \{\text{stulet}\}^c\right)$$

$$P(\{\text{trasigt}\}) = P(\{\text{trasigt}\} \cap \{\text{stulet}\}) + P(\{\text{trasigt}\} \cap \{\text{stulet}\}^c) =$$

Def: $P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$

$$= P(\{\text{trasigt}\} \mid \{\text{stulet}\}) P(\{\text{stulet}\}) + P(\{\text{trasigt}\} \mid \{\text{stulet}\}^c) P(\{\text{stulet}\}^c)$$

$P(\{\text{stulet}\}) = ?$

Antagande $\Rightarrow P(\{\text{stulet}\}) = 0.01$

$\Rightarrow P(\{\text{trasigt}\}) = 0.5 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0545$

$$\boxed{\text{Def: } P(A_2 \mid A_1) P(A_1) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_1) = P(A_1 \mid A_2) P(A_2)}$$

$$\text{Def} \Rightarrow P(\{\text{stulet}\} \mid \{\text{trasigt}\}) = \frac{P(\{\text{trasigt}\} \mid \{\text{stulet}\}) P(\{\text{stulet}\})}{P(\{\text{trasigt}\})}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.01}{0.0545} = 0.0917\ldots \approx 0.092$$

Johanul@chalmers.se