Uppgift 4.4

den 22 april 2021 15:12

En del av plasten i skrotbilar kan rivas ut och återanvändas. Låt X beteckna mängden plast som kan återanvändas i en skrotbil. Antag att tätheten för X ges av uttrycket (angivet med enheten pounds)

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in [25, 50]$$

a) Verifiera att $f(x)$ är en täthetsfunktion för en kontinuerlig variabel.

b) Bestäm sannolikheten att en slumpmässigt vald skrotbil innehåller mellan 30 och 40 pounds plast.

c) Skissa täthetsfunktionen och markera arean som motsvarar sannolikheten i b).

Lösning:

a) Vill visa: $f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$f(x)$ definierad för $x \in [25,50] \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$, $\ln 2 > 0$ $\Rightarrow f(x) \geq 0$

$x \notin [25,50] \Rightarrow$ enligt def. $f(x) = 0$.

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ ✓

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{25}^{50} \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln x\right]_{25}^{50} = \frac{1}{\ln 2}(\ln 50 - \ln 25) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{50}{25} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln 2 = 1 \quad ✓$$

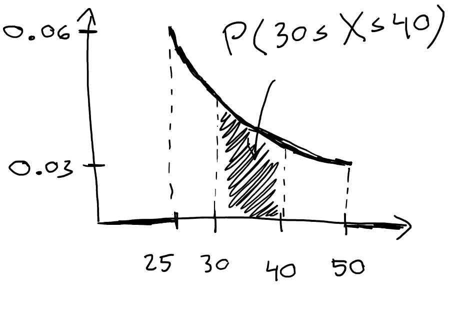
$\therefore$ f är en täthetsfunktion.

b) Sökt: $P(30 \leq X \leq 40)$

$$P(30 \leq X \leq 40) = \int_{30}^{40} f(x)\,dx = \int_{30}^{40} \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln x\right]_{30}^{40} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\ln(40/30)\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln(4/3) \approx 0.415$$

c)



$$f(25) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{25} \approx 0.058$$

$$f(50) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{50} \approx 0.029$$

Uppgift 4.10

Bestäm den kumulativa fördelningsfunktionen för en slumpvariabel X som är likformigt fördelad på intervallet (a,b).

Lösning:

Sökt: $F(x)$.

Täthet för X: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in (a,b)$

$$F(x) = P(X \le x)$$

För $x \in (a,b) \Rightarrow P(X \le x) = \int_a^x f(y)\,dy = \frac{1}{b-a}[y]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$

För $x \le a \Rightarrow P(X \le x) = \int_{-\infty}^x f(y)\,dy = 0$

$f(y) = 0$ för $y \le a$

För $x \ge b \Rightarrow P(X \le x) = \int_{-\infty}^x f(y)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy = 1$

$f(y) = 0$ för $y \ge b$ och för $y \le a$

$$\therefore \quad F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \ x \in (a,b) \\ 1 & , \ x \ge b \end{cases}$$

<u>Uppgift 4.16</u>

Låt X vara mängden plast i en skrotbil. Antag att

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in [25, 50]$$

Bestäm väntevärdet, variansen och standardavikelsen av X.

<u>Lösning:</u>

Sökt: $E[X]$, $Var[X]$, $\sqrt{Var[X]}$

Behöver: $E[X]$, $E[X^2]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{25}^{50} \cancel{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,[x]_{25}^{50} = \frac{50-25}{\ln 2} = \frac{25}{\ln 2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{25}^{50} x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \int_{25}^{50} x \cdot \frac{1}{\ln 2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{25}^{50} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{50^2}{2} - \frac{25^2}{2}\right) = \frac{1}{2 \cdot \ln 2}\left(2500 - 625\right) = \frac{1875}{2 \cdot \ln 2}$$

$$\Rightarrow Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1875}{2 \cdot \ln 2} - \frac{625}{(\ln 2)^2} = \frac{\ln 2 \cdot 1875}{2 \cdot (\ln 2)^2} - \frac{2 \cdot 625}{2 \cdot (\ln 2)^2} =$$

$$= \ldots \approx 51.67$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} \approx \sqrt{51.67} \approx 7.19$$

Uppgift 4.18

Täthetsfunktionen för en slumpvariabel X som är likformigt fördelad på (a,b) är

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$$

Använd följande definition

$$E(H(X)) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x) dx$$

för att visa att

$$E(X) = \frac{b+a}{2}, \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Lösning:

$$E[X] \overset{\substack{H(x)=x \\ \text{i def.}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cancel{(b-a)}}(b+a)\cancel{(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$

Vill använda $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3(b-a)}(b^3 - a^3) =$$

$H(x) = x^2$ i def.

$$= \frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{3\cancel{(b-a)}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$

Ok! $= b^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - a^3$

$$\Rightarrow Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2^2} =$$

$$= \frac{4(b^2+ab+a^2)}{12} - \frac{3(b^2+2ab+a^2)}{12} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Uppgift 4.24

Antag att den ökade efterfrågan på elektrisitet under den kommande perioden av 2 år är en slumpvariabel med täthetsfunktion given av (med enhet miljoner kWh)

$$f(x) = \frac{1}{64}x^3, \quad 0<x<4$$

a) Verifiera att $f(x)$ är en täthetsfunktion.

b) Finn ett uttryck för $F(x)$, den kumulativa fördelningsfunktionen. Använd $F(x)$ för att bestämma sannolikheten att ökningen är som mest 2 miljoner kWh.

c) Om ett visst område har möjlighet att öka produktionen med som mest 3 miljoner kWh, vad är då sannolikheten att efterfrågan kommer att överskrida tillgången/utbudet?

d) Bestäm väntevärdet av ökningen av efterfrågan.

Lösning:

a)

Vill visa: $f(x) \geq 0 \ \forall x$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ x<0 \underset{\text{enligt def.}}{\Rightarrow} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \checkmark$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{64}\cdot x^3\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{64}\left(\frac{4^4}{4} - \frac{0}{4}\right) = \frac{1}{64}\cdot \overbrace{4^3}^{=64} = 1 \ \checkmark$$

b) Sökt: $F(x)$, $P(X \leq 2) = F(2)$

$$F(x) \overset{def}{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

För $x \leq 0$: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \underset{f(y)=0 \text{ för } y<0}{=} 0$

För $x \in (0,4)$: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{64}\cdot y^3\,dy = \frac{1}{64}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x =$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{0}{4}\right) = \frac{x^4}{256}$$

För $x \geq 4$: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \underset{\substack{f(y)=0 \text{ för } y<0 \\ \text{och för } y>4}}{=} \int_0^4 f(x)\,dx \underset{\substack{f \text{ är täthetsfunk.} \\ \text{enligt a)}}}{=} 1$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ \frac{x^4}{256} & , \quad x \in (0,4) \\ 1 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

$$P(X \le 2) = F(2) \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \in (0,4)}}{=} \frac{2^4}{256} = \frac{2^4}{4 \cdot 64} = \frac{\cancel{4 \cdot 4}}{\cancel{4 \cdot 4} \cdot 16} = \frac{1}{16}$$

c) Sökt: $P(X \ge 3)$

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) \underset{\uparrow}{=} 1 - F(3) \underset{\substack{\nearrow \\ 3 \in (0,4)}}{=} 1 - \frac{3^4}{256} = \frac{256 - 81}{256} = \frac{175}{256}$$

$\boxed{X \text{ är kontinuerlig} \Rightarrow P(X < 3) = P(X \le 3)}$

≈ 0.68

d) Sökt: $E[X]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{64} \cdot x^3\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{1}{64}\left(\frac{4^5}{5} - \frac{0}{5}\right) =$$

$$= \frac{4^5}{4^3 \cdot 5} = \frac{16}{5}$$

Uppgift 4.30

Låt X vara en gammafördelad variabel med parametrar α och β. Använd momentgenererande funktionen för X för att bestämma $E[X]$, $E[X^2]$ och $Var[X]$.

Lösning:

Sökt: $E[X]$, $E[X^2]$, $Var[X]$

Tabell 4.1 sid 136 $\Rightarrow m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$

Sats $\Rightarrow E[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} m_X(t)\Big|_{t=0}$

Behöver $\frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0}$, $\frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0}$

$$\frac{d}{dt} m_X(t) = \frac{d}{dt}\left((1-\beta t)^{-\alpha}\right) = -\alpha\,(1-\beta t)^{-(\alpha+1)}(-\beta) = \alpha\beta(1-\beta t)^{-(\alpha+1)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \overset{se}{=} \frac{d}{dt}\left(\alpha\beta(1-\beta t)^{-(\alpha+1)}\right) = \alpha\beta\,(-(\alpha+1))(1-\beta t)^{-(\alpha+2)} \cdot (-\beta) =$$

$$= \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-\beta t)^{-(\alpha+2)}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = \alpha\beta$$

$$E[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = \alpha\beta^2(\alpha+1) = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \cancel{\alpha^2}\beta^2 + \alpha\beta^2 - \cancel{\alpha^2}\beta^2 = \alpha\beta^2$$

Uppgift 4.34

Ett visst kärnkraftverk släpper ut mätbara mänger av radioaktiva gaser i genomsnitt 2 gånger i månaden.

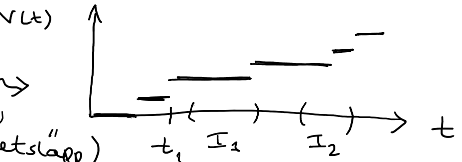
a) Hur stor är sannolikheten att det tar minst 3 månader innan en mätbar mängd av radioaktiva gaser släpps ut?

b) Hur lång tid tar det i genomsnitt innan den första mätbara mängden av radioaktiva gaser släpps ut?

Lösning:

Def: Poissonprocess $\{N(t),\ t \geq 0\}$ med intensitet $\lambda > 0$ uppfyller

1. $N(0) = 0$
2. Oberoende inkrement, se bild ⤳
3. antalet händelser (i detta fall utsläpp) i ett intervall av längd t_1 är en Poissonvariabel med parameter λt_1 (se bild)



$3 \Rightarrow \quad E(N(t)) = \lambda t$

$N(t)$ = Totala antalet utsläpp till tid t

Antagande $\Rightarrow \quad 2 = E(N(1)) = \lambda \cdot t \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

Def $\Rightarrow$ Tiden mellan varje händelse är exponentialfördelad med parameter λ.

Kom ihåg: $E[\exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}$ (i boken används $\exp(1/\lambda)$, $E(\exp(1/\lambda)) = \lambda$)

a) $X := \{\text{Totala antalet utsläpp till tid } t=3\} = N(3)$

3. i def. $\Rightarrow \quad X \sim \text{Poisson}(2 \cdot 3) = \text{Poisson}(6)$

$t_1 = 3$ i def.

Sökt: $P(X = 0)$

Täthetsfunktion för Poisson(6): $p(x) = \dfrac{e^{-6}\, 6^x}{x!}$

$\Rightarrow P(X=0) = p(0) = \dfrac{e^{-6}\, 6^0}{0!} = e^{-6} \approx 0.0025$

b) Från ovan: Förväntade tiden innan första utsläppet ges av

$E[\exp(\lambda)] = \dfrac{1}{\lambda} \underset{\lambda=2}{=} \dfrac{1}{2}$

dvs, en halv månad.

Uppgift 4.36

Oljud i en gruva uppstår i genomsnitt 3 gånger per timme. Hur stor är sannolikheten att inget oljud uppstår under en period av 30 minuter?

Lösning:

Kom ihåg def. av Poissonprocess.

$N(t) :=$ Totala antalet oljud till tid t.

Vad är intensiteten $\lambda > 0$?

vet: $E(N(t)) = \lambda t$.

Antagande $3 = E(N(1)) = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$

$X := \{\text{Tiden till första oljudet}\}$

Def av Poissonprocess $\Rightarrow X \sim \exp(3)$

Notera att jag även här använder annan definition av en exponentialvariabel än vad som står i boken

Sökt: $P(X > 0.5)$

$$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5)$$

Tabell 4.1 sid 136 $\Rightarrow P(X = x) = 3e^{-3x}$

$$\Rightarrow P(X \leq x) = \int_0^x P(X = y)\,dy = 3\int_0^x e^{-3y}\,dy =$$

$$= 3\left[\frac{e^{-3y}}{-3}\right]_0^x = -\left(e^{-3y} - e^0\right) =$$

$$= 1 - e^{-3y}$$

$$\Rightarrow P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - 1 + e^{-3 \cdot 0.5} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22$$

Uppgift 4.40

Låt X vara densiteten för en viss typ av lera. Studier har visat att X är normalfördelad med medelvärde 1.5 och standardavikelse 0.2.

a) Vad är täthetsfunktionen för X? Skissa täthetsfunktionen för X och markera arean som motsvarar sannolikheten att $1.1 < X < 1.9$. Beräkna även denna sannolikhet.

b) Beräkna sannolikheten att $X < 0.9$.

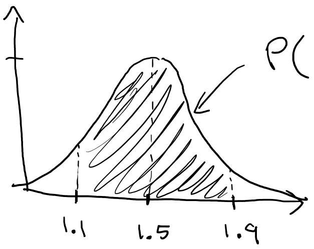
c) Skulle du bli förvånad om $X > 2$ observerades?

d) Bestäm x sådant att $P(X \geq x) = 0.1$.

e) Vad är den momentgenererande funktionen för X?

Lösning:

a) Antagande $\Rightarrow X \sim \text{normal}(1.5,\ 0.2^2)$



Sökt: $P(1.1 < X < 1.9)$

$\mu = 1.5$ i "kom ihåg"

$$P(1.1 < X < 1.9) = P(1.1 - 1.5 < X - 1.5 < 1.9 - 1.5) =$$
$$= P(-0.4 < X - 1.5 < 0.4) =$$
$$= P\left(\frac{-0.4}{0.2} < \frac{X-1.5}{0.2} < \frac{0.4}{0.2}\right) = P\left(-2 < \frac{X-1.5}{0.2} < 2\right)$$

Kom ihåg:

$Y \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$

$Z := \frac{Y - \mu}{\sigma} \Rightarrow Z \sim \text{normal}(0,1)$

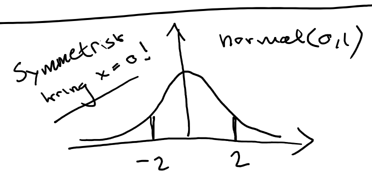
$\sigma = 0.2$ "kom ihåg"

$$W := \frac{X - 1.5}{0.2} \sim \text{normal}(0,1)$$

enligt "kom ihåg"

$$\Rightarrow P(1.1 < X < 1.9) = P(-2 < W < 2) =$$
$$= F_W(2) - \underbrace{F_W(-2)}_{= 1 - F_W(2)} =$$
$$= 2F_W(2) - 1$$

se bild



Tabell V sid 698 $\Rightarrow F_W(2) \approx 0.9772$

$$\Rightarrow P(1.1 < X < 1.9) = 2F_W(2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

b) Sökt: $P(X < 0.9)$

"kom ihåg" $\Rightarrow P(X < 0.9) = P\left(\frac{X - 1.5}{0.2} < \frac{0.9 - 1.5}{0.2}\right) = P(W < -3) =$

W är kontinuerlig

$$= \underbrace{P(W \leq -3)}_{\text{kan slå upp detta direkt}} = 1 - P(W \geq 3) \approx 1 - 0.9987 =$$

Symmetri se bild ovan

$W \sim \text{normal}(0,1)$ Tabell V sid 698

$$= 0.0013$$

c) Sökt: $P(X > 2)$

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P\left(\frac{X-1.5}{0.2} \leq \frac{2-1.5}{0.2}\right) =$$

$$= 1 - P(W \leq 2.5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tabell V} \\ \text{Sid 698}}}{\approx} 1 - 0.9938 = 0.0062$$

dvs sannolikheten för $X > 2$ är ungefär 0.62%

$\therefore$ Ja, vi skulle bli förvånade.

d) Sökt: $x \in \mathbb{R}$ sådant att $P(X \geq x) = 0.1$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P\left(\frac{X-1.5}{0.2} < \frac{x-1.5}{0.2}\right) = 1 - P\left(W < \frac{x-1.5}{0.2}\right)$$

vet: $P(X \geq x) = 0.1 \Rightarrow 0.1 = 1 - P\left(W < \frac{x-1.5}{0.2}\right)$

$$\Leftrightarrow P\left(W < \frac{x-1.5}{0.2}\right) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$z := \frac{x-1.5}{0.2} \Rightarrow$ vill hitta $z \in \mathbb{R}$ $P(W < z) = 0.9$

Tabell V sid 698 $\Rightarrow z \approx 1.28$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(W < 1.28) \approx 0.8997 \\ P(W < 1.29) \approx 0.9015 \\ \Rightarrow 1.28 \text{ är närmast} \end{array}}$$

$z = \frac{x-1.5}{0.2} \Rightarrow x = 0.2z + 1.5 \approx 0.2 \cdot 1.28 + 1.5 =$

$= 1.756$

e) Sökt: $m_X(t)$

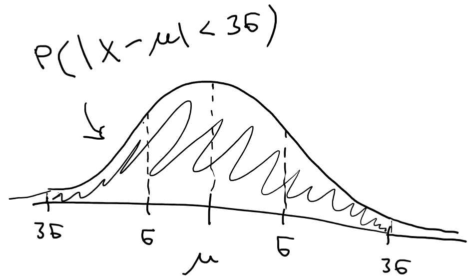
Sats 4.4.1 sid 114 $\Rightarrow m_X(t) = e^{1.5t + \underbrace{\frac{0.2^2}{2}}_{0.02} t^2} = e^{1.5t + 0.02t^2}$

Uppgift 4.50

För en normalfördelad variabel X med $E[X]=\mu$ och $Var[X]=\sigma^2$ gäller att

$$P(|X-\mu|<3\sigma)\approx 0.997.$$

Vilken undre gräns ger Chebyshev's olikhet? Vilket av dessa två resultat är starkast?



Lösning:

Kom ihåg (Chebyshevs olikhet)

$k>0 \quad P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq \frac{1}{k^2}$

Vårt fall: $k=3 \Rightarrow P(|X-\mu|\geq 3\sigma)\leq \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow 1-P(|X-\mu|<3\sigma)\leq\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{9}\leq P(|X-\mu|<3\sigma)$$

$$\Rightarrow P(|X-\mu|<3\sigma)\geq\frac{9-1}{9}\approx\boxed{0.889}$$

undre gräns i Chebychev

Första påståendet gäller endast för normal(μ,σ^2)

Andra påståendet gäller alla slumpvariabler med väntevärde μ och varians σ^2.

Men de motsäger inte varandra eftersom $0.889<0.997$.

Uppgift 4.54

En kemisk reaktion med en vanlig produktion på 70 % används. En ny process har utarbetats som kan öka produktionen. Förespråkarna för den nya hävdar att den ska ge högre produktion i fler än 90 % av gångerna. Den nya processen testas 60 gånger. Låt X beteckna antalet test där produktionen överskrider 70 %.

a) Om sannolikheten för ökad produktion är 0.9, är då en approximation med en normalfördelning rimlig?

b) Om sannolikheten för ökad produktion är $p = 0.9$, vad är då $E[X]$?

c) Om $p > 0.9$, som hävdas, då borde testet resultera i att fler än 54 av 60 visade ökad produktion. Vi accepterar påståendet om $X \geq 59$. Vad är sannolikheten att vi accepterar påståendet om $p = 0.9$?

d) Vad är sannolikheten att vi inte accepterar påståendet (dvs att $X \leq 58$) om $p = 0.95$?

Lösning:

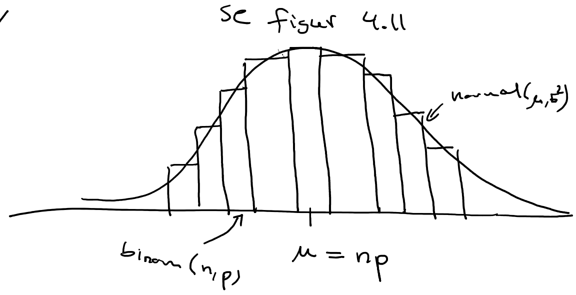
a) $X \sim \text{Binomial}(60, 0.9)$ $(n = 60, p = 0.9)$

Sats 4.6.1 sid 121 (kommentar till sats) $\Rightarrow$ Normalapproximation är rimlig om $p \leq 0.5$ och $np > 5$ eller $p > 0.5$ och $n(1-p) > 5$

Antagande: $p = 0.9 > 0.5$ ✓

$n(1-p) = 60 \cdot (1 - 0.9) = 60 \cdot 0.1 = 6 > 5$ ✓

se figur 4.11



$\therefore$ Normalapproximation är rimligt

b) Sökt: $E[X]$.

$$\left.\begin{array}{l} p = 0.9 \\ X \sim \text{Binom}(n,p) \end{array}\right\} \Rightarrow E[X] = np \overset{\substack{n=60 \\ p=0.9}}{=} 60 \cdot 0.9 = 54$$

c) Sökt: $P(X \geq 59)$ med $p = 0.9$

$$\frac{60!}{59!(60-59)!} = \frac{60 \cdot \cancel{59!}}{\cancel{59!}} = 60$$

$$P(X \geq 59) = \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} 0.9^x \underbrace{(1-0.9)}_{=0.1}^{60-x} = \binom{60}{59} \cdot 0.9^{59} \cdot 0.1^1 + \underbrace{\binom{60}{60}}_{=1} \cdot 0.9^{60} \cdot 0.1^0 =$$

$$= 60 \cdot 0.9^{59} \cdot 0.1 + 0.9^{60} \approx 0.01378$$

dvs, sannolikheten är ungefär 1.4 %

d) Sökt: $P(X \leq 58)$ med $p = 0.95$

d) Sökt: $P(X \leq 58)$ med $p = 0.95$

$$P(X \leq 58) = 1 - P(X > 58) \underset{\uparrow}{=} 1 - P(X \geq 59) = 1 - \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} \cdot 0.95^{x} \underbrace{(1-0.95)}_{0.05}^{60-x} =$$

X är diskret

$$= 1 - \underbrace{\binom{60}{59}}_{=60} 0.95^{59} \cdot 0.05^{1} - \underbrace{\binom{60}{60}}_{=1} 0.95^{60} \cdot \underbrace{0.05^{0}}_{=1} =$$

$$= 1 - 60 \cdot 0.95^{59} \cdot 0.05 - 0.95^{60} \approx 0.81$$

dvs ungefär 81 % sannolikhet att vi inte accepterar med $p = 0.95$

Uppgift 4.60

Låt X vara Weibullfördelad med parametrar $\alpha = 0.04$ och $\beta = 2$.

a) Finn täthetsfunktionen, väntevärdet och variansen för X.

b) Finn överlevnadsfunktionen R_X för X.

c) Vad är $R_X(5)$ och $R_X(10)$?

d) Finn felintensitetsfunktionen $\rho(t)$ för X.

e) Vad är felintensiteten vid $t=5$ och $t=10$?

f) Bestäm $P(X \leq 3)$.

Lösning:

a) Def. 4.7.1 sid 124 $\Rightarrow f_X(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} \overset{\alpha=0.04,\beta=2}{=} 0.08 x e^{-0.04x^2}$, för $x>0$

Sats 4.7.1 sid 124 $\Rightarrow E[X] = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma(1+\frac{1}{\beta}) \overset{\alpha=0.04,\beta=2}{=} 5\Gamma(\frac{3}{2})$

$$Var[X] = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - E[X]^2 \overset{\alpha=0.04,\beta=2}{=} 25\Gamma(2) - 25\left[\Gamma(\tfrac{3}{2})\right]^2$$

b) Sökt: $R_X(t)$

$$R_X(t) \underset{\text{se sid 125}}{=} 1 - F_X(t) \underset{\text{se Wikipedia för kum. fördelning}}{=} 1 - (\underbrace{1 - e^{-\alpha t^\beta}}_{=F_X(t)}) = e^{-\alpha t^\beta} \overset{\alpha=0.04,\beta=2}{=} e^{-0.04t^2}$$

c) Sökt: $R_X(5)$ och $R_X(10)$.

$R_X(5) = e^{-0.04\cdot 5^2} = e^{-1} \approx 0.37$

$R_X(10) = e^{-0.04\cdot 10^2} = e^{-4} \approx 0.018$

d) Sökt: $\rho(t)$

Sats 4.7.2 sid 126 $\Rightarrow \rho(t) = \dfrac{f_X(t)}{R_X(t)} \overset{\alpha=0.04,\ \beta=2}{=} \dfrac{0.04\cdot 2\cdot t\cdot \cancel{e^{-0.04\cdot t^2}}}{\cancel{e^{-0.04t^2}}} = 0.04\cdot 2\cdot t$

$\left(= \alpha\beta t^{\beta-1} \right)$

e) Sökt: $\rho(5)$ och $\rho(10)$

d) $\Rightarrow \rho(5) = 0.04\cdot \underbrace{2\cdot 5}_{10} = 0.4$

$\rho(10) = 0.04\cdot 2\cdot 10 = 0.8$

f) Sökt: $P(X\leq 3)$

$$P(X\leq 3) = F_X(3) \underset{\text{sid 125}}{=} 1 - R_X(3) = 1 - e^{-\alpha 3^\beta} \overset{\alpha=0.04,\beta=2}{=} 1 - e^{-0.04\, 3^2} \approx 0.302$$

Uppgift 4.64

$\varrho(t)$ är en felintensitetsfunktion definierad av

$$\varrho(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \forall t>0,$$

där $\alpha>0$ och $\beta>0$.

a) Visa att $\varrho(t)$ är konstant om $\beta=1$.

b) Bestäm $\varrho'(t)$ och visa att

$$\varrho'(t)>0 \iff \beta>1$$

$$\varrho'(t)<0 \iff \beta<1$$

Lösning:

a) Sökt: $c \geq 0$ sådant att $\varrho(t)=c \ \forall t>0$ om $\beta=1$.

$$\beta=1 \Rightarrow \beta-1=0 \Rightarrow t^{\beta-1}=t^0=1 \Rightarrow \varrho(t) \underset{\beta=1}{=} \alpha$$

$$c := \alpha \Rightarrow \varrho(t)=c \ \forall t \geq 0.$$

b) Sökt: $\varrho'(t)$

$$\varrho(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

$$\Rightarrow \varrho'(t) = \frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}\right) = \alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta>1 \iff \beta-1>0 \iff \varrho'(t)=\alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2}>0 \\ \beta<1 \iff \beta-1<0 \iff \varrho'(t)=\alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2}<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta>1 \iff \varrho'(t)>0 \\ \beta<1 \iff \varrho'(t)<0 \end{array}\right.$$

$\alpha, \beta, t > 0$

Uppgift 4.66

Ett system består av två oberoende seriekopplade komponenter. Livslängden för den första följer en Weibullfördelning med $\alpha = 0.006$ och $\beta = 0.5$. Livslängden för den andra följer en exponentialfördelning med parameter $\lambda = \frac{1}{25000}$. (Notera att jag även här använder den "andra" definitionen av exp-variabel)

a) Bestäm sannolikheten att systemet fungerar efter 2500 timmar, dvs $R(2500)$.

b) Bestäm sannolikheten att systemet har slutat att fungera innan 2000 timmar.

c) Om komponenterna istället är parallellkopplade, vad är då sannolikheten att systemet slutar att fungera innan 2500 timmar?

Lösning:

Låt R_1 beteckna överlevnadsfunktionen för den första komponenten.
Låt R_2 beteckna överlevnadsfunktionen för den andra komponenten.

Uppgift 4.60 $\Rightarrow R_1(t) = e^{-\alpha t^\beta} \underset{\alpha = 0.006,\ \beta = 0.5}{=} e^{-0.006\cdot\sqrt{t}}$

Andra komponenten har livslängd som är en $\exp\left(\frac{1}{25000}\right)$ - variabel

$\Rightarrow R_2(t) = 1 - F_2(t) = 1 - \left(1 - e^{\frac{-t}{25000}}\right) = e^{\frac{-t}{25000}}$

a) Sökt: $R(2500)$, då systemet är seriekopplat

Seriekopplade komponenter $\Rightarrow R(t) = R_1(t)R_2(t)$
se sid 129

$\Rightarrow R(2500) = \underbrace{e^{-0.006\sqrt{2500}}}_{0.3} \cdot e^{-\overbrace{\frac{25\cancel{00}}{250\cancel{00}}}^{0.1}} \approx 0.67$

b) Sökt: P(slutat fungera innan 2000h), då systemet är seriekopplat

P(slutat fungera innan 2000h) = 1 − P(inte slutat fungera innan 2000h) =

$= 1 - R(2000) = 1 - \underbrace{e^{-0.006\sqrt{2000}}}_{\approx 0.268} \cdot e^{-\underbrace{\frac{2000}{25000}}_{0.08}} \approx$

≈ 0.294

$R(t) = R_1(t)R_2(t)$ eftersom seriekopplat system

c) Sökt: $R(2500)$, då systemet är parallellkopplat

Parallellkopplade komponenter $\Rightarrow R(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))$
se sid 130

$\Rightarrow R(2500) = 1 - \left(1 - e^{-0.006\sqrt{2500}}\right)\left(1 - e^{-\overbrace{\frac{2500}{25000}}^{0.1}}\right) \approx$

≈ 0.975

Uppgift 4.68

Tre oberoende komponenter används i ett system, Varje fungerar med sannolikhet 0.9.

a) Antag att systemet fungerar om minst en komponent fungerar.
Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

b) Antag att systemet fungerar om minst två av komponenterna fungerar.
Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

c) Antag att systemet fungerar om alla komponenter fungerar.
Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

Lösning:

a) Sökt: P(systemet fungerar)

$$P(\text{systemet fungerar}) = P(\text{minst en komponent fungerar}) =$$
$$= 1 - P(\text{alla komponenter är trasiga}) =$$
$$= 1 - P(\text{första är trasig})P(\text{andra är trasig})P(\text{tredje är trasig}) =$$
$$= 1 - 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 1 - 10^{-3} = 0.999$$

b) $X := \{\text{Antal komponenter som fungerar}\}$

Sökt: $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$P(X=3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alla måste fungera i detta fall}}}{=} 0.9^3$$

$$P(X=2) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\substack{\text{Vi ska välja ut två som} \\ \text{fungerar av de tre}}} \overbrace{0.9^2}^{\substack{\text{Sannolikheten att} \\ \text{två fungerar}}} \cdot \underbrace{0.1}_{\substack{\text{Sannolikheten att} \\ \text{en inte fungerar}}} = \frac{\overbrace{3!}^{3\cdot 2!}}{2!\underbrace{(3-2)!}_{=1}} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = 0.9^3 + 0.243 = 0.972$$

c) Sökt: P(systemet fungerar)

$$P(\text{systemet fungerar}) = P(\text{första komp. fungerar})P(\text{andra komp. fungerar})P(\text{tredje komp. fung.}) =$$
$$= 0.9^3 = 0.729$$

Uppgift 4.70

Låt X vara en slumpvariabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0, \sqrt{8}] \\ 0, & x \notin [0, \sqrt{8}] \end{cases}$$

och låt $Y = X + 3$.

a) Bestäm $E[X]$ och använd det för att bestämma $E[Y]$.

b) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

c) Använd svaret i b) för att bestämma $E[Y]$ och jämför det här värdet med svaret i a).

Lösning:

a) Sökt: $E[X]$, $E[Y]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \underset{\substack{f_X(x)=0 \text{ för } x<0 \\ \text{och för } x>\sqrt{8}}}{=} \int_0^{\sqrt{8}} x \cdot \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{8})^3}{3} - \frac{0}{3}\right) = \frac{8\sqrt{8}}{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{8}}{3}}$$

$$E[Y] = E[X+3] = E[X] + 3 = \boxed{\frac{2\sqrt{8}}{3} + 3}$$

b) Sökt: $f_Y(y)$

Låt $g(x) := x + 3$

$\Rightarrow Y = g(X)$.

Sats 4.8.1 sid 131 $\Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy}(g^{-1}(y))\right|$

$g(x) = x + 3 \Rightarrow g^{-1}(y) = y - 3$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = \frac{d}{dy}(y-3) = 1$$

$f_X > 0$ för $x \in (0, \sqrt{8}] \Rightarrow f_X(g^{-1}(y)) > 0$ för $\overbrace{g^{-1}(y)}^{=y-3} \in (0, \sqrt{8}]$

$y - 3 \in (0, \sqrt{8}] \Leftrightarrow y \in (3, \sqrt{8}+3] \Rightarrow f_X(y-3) > 0$ för $y \in (3, \sqrt{8}+3]$

$f_X(y-3) = 0$ för $y \notin [3, \sqrt{8}+3]$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y-3) \cdot 1 = \frac{1}{4}(y-3), & y \in [3, \sqrt{8}+3] \\ 0, & y \notin [3, \sqrt{8}+3] \end{cases}$$

c) Sökt: $E[Y]$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \underset{f_Y(y)=0 \text{ för}}{=} \int_3^{\sqrt{8}+3} y \cdot \frac{1}{4}(y-3)\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3} - 3 \cdot \frac{y^2}{2}\right]_3^{\sqrt{8}+3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\overbrace{(\sqrt{8}+3)^3}^{8\sqrt{8}+3^2\cdot 8+3^3\cdot\sqrt{8}+3^3}}{3} - 3 \cdot \frac{\overbrace{(\sqrt{8}+3)^2}^{8+3^2+6\sqrt{8}}}{2} - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot \frac{3^2}{2}\right) =$$

$f_Y(y) = 0$ för

$y \notin [3, \sqrt{8} + 3]$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{8\sqrt{8} + 3^2 \cdot 8 + 3^3 \cdot \sqrt{8} + \cancel{3^3} - \cancel{3^3}}{3} + \frac{\cancel{3^3} - 3 \cdot 8 - \cancel{3^3} - 3^2 \cdot 6 \cdot \sqrt{8}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(8\sqrt{8} + 3^2 \cdot 8 + \cancel{3^3 \cdot \sqrt{8}} - 3^2 \cdot 4 - \cancel{3^3\sqrt{8}} \right) = \frac{8\sqrt{8}}{12} + \frac{36}{12}$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{8}}{12} + 3}$$