

1a) $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ Lös $Ax = 0$:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \cdot R_2, -3 \cdot R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3 \cdot R_2, -R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(I)} = [T|0]$$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$. Då (II) $x_2 - s + t = 0 \Leftrightarrow x_2 = s - t$ $s, t \in \mathbb{R}$

(I) $x_1 - (s - t) + 3s + t = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2s - 2t$

$$\text{Alltså } N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alltså en bas för $N(A)$ ges av $\{(-2, 1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\}$

$N \dim A = \# \text{ vektorer i en bas} = 2$

Minns: t_1, t_2 pivotkolonner i $T \Leftrightarrow a_1, a_2$ bas för $\text{Kern}(A)$ Alltså en bas för $\text{Kern}(A)$ ges av $\{(1, 0, 2, 3), (-1, 1, 1, -2)\}$

$\text{Rang } A = \dim(\text{Kern}(A)) = \# \text{ vektorer i bas} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \det A = 0$ ty $\text{Kern}(A) \neq \mathbb{R}^4$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ty underdel av A (stygk rad 1 & kolumn 2)
av dimension 3. 0 ty rang rang $A = 2$

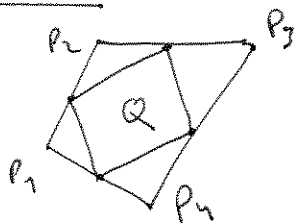
2) a) $F(x, y) = f \circ g(x, y) = f(x + iy) = x + y$. Alltså $F(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Alltså $F(x) \neq f \circ m(Ax)$. Alltså F linjär.b) $F(x, y) = f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$. OBS $F(-1, 0) = \sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1 F(1, 0) = -1$ Alltså $F(\lambda(x, y)) \neq \lambda F(x, y)$ i allmänhet. Alltså F ej linjär.3 a) FALSKT lösbar alla b om rang $A = m$

b) ~~FALSKT~~ ty $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 + 4 - 6 - 6) = 0$

c) FALSKT matrisprodukt är kommutativ

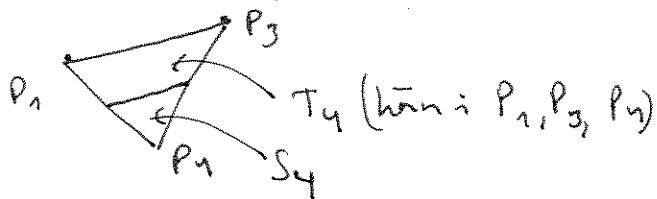
d) SANT Om $v \neq 0$ så är $\{v\}$ enda vektor som är $\parallel v \perp v$ e) SANT Rang $A = 2$ ty $f(\mathbb{R}^3) = 2$ $N \dim A = 2$ f) SANT ty $u, v, u+v$ ligger i ett plan

4) Antag P_i
 har hörn
 P_1, P_2, P_3, P_4



För varje hörn låt T_i vara
 triangeln med hörn i P_i och låt
 S_i vara triangeln med hörn i P_i
 och de två närliggande mittpunkterna

Ex:



$$\text{Obs: Area}(S_4) = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{P_4 P_1} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{P_4 P_3} \right| =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{P_4 P_1} \cdot \overrightarrow{P_4 P_3} \right| = \frac{1}{4} \text{Area}(T_4)$$

På samma sätt $\text{Area}(S_i) = \frac{1}{4} \text{Area}(T_i)$

$$\text{Obs: Area}(P) = \text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_2)$$

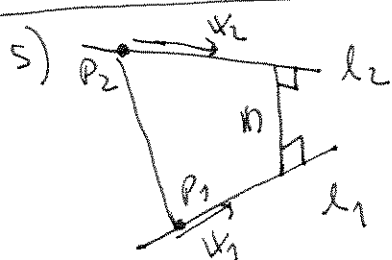
$$(*) = \text{Area}(T_2) + \text{Area}(T_4)$$

$$\text{och } \underline{\text{Area}(Q)} = \text{Area}(P) - (\text{Area}(S_1) + \dots + \text{Area}(S_4))$$

$$= \text{Area}(P) - \frac{1}{4} (\text{Area}(T_1) + \dots + \text{Area}(T_4)) =$$

$$= 2 \text{Area}(P)$$

$$\text{Area}(P) = \frac{1}{4} \cdot 2 \text{Area}(P) = \frac{1}{2} \text{Area}(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



Strategi: hitta $m \perp v_1, v_2$. Då är avståndet
 mellan l_1 och l_2 längden av vektor proj av $\overrightarrow{P_1 P_2}$ på m .

Bestäm parametrisering av l_1 :

$$l_1 \text{ är lösningen till } \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \quad (I) \\ y+2z=3 \quad (II) \end{cases}$$

$$\text{Sätt } z=s \in \mathbb{R}. \text{ Då (II): } y+2s=3 \Rightarrow y=3-2s$$

$$(I) \quad x+3-2s+s=1 \Rightarrow x=s-2$$

$$\text{dvs } \underline{l_1 = (-2, 3, 0) + s(1, -2, 1)} \quad \text{och } \underline{l_2 = (0, 1, -1) + t(1, 1, 1)}$$

$$\text{Kann man välja } v_1 = (1, -2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1)$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 4)$$

$$\text{Välj till exempel } m = (1, 0, -1). \text{ Kan välja } P_1 = (-2, 3, 0), P_2 = (0, 1, -1) \quad \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, -2, -1)$$

$$\text{Nu: } \underline{\text{avst.}(l_1, l_2)} = \left| \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot m}{|m|^2} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot m}{|m|^2} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot m|}{|m|^2} = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot m|}{|m|}$$

$$\frac{|(2, -2, -1) \cdot (1, 0, -1)|}{\sqrt{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

6)
$$\begin{vmatrix} 1+X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+X & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1+X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \\ \uparrow \\ \textcircled{1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} n+X & n+X & \dots & n+X \\ 1 & 1+X & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \\ \uparrow \\ \textcircled{1} \end{matrix} =$$

Laggs varje rad nr 2, ..., n till rad nr 1

$\begin{matrix} \text{bytt} \\ \text{ut } n+X \\ \text{barn ut} \\ 1 \end{matrix}$

$$(n+X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+X & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+X \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} =$$

$\text{Laggs } -2 \cdot \text{rad } 1 \text{ till varje annan rad}$

dragad matrix

$$(n+X) 1 \cdot X \dots X = (n+X) X^{n-1}$$

7) se även Kapitel 2.4

8) a) se även Kapitel 5.2

b, c) se även Kapitel 5.4