

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga

Datum: 2021-10-26 kl. 14.00-18.00

MVE530 Inledande matematik: Lösningar

Del 1: Godkänddelen

1. (15p) Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. En cirkel ges av ekvationen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y - 3 = 0.$$

- a. (3p) Ange cirkelns centrumpunkt och radie.
b. (2p) Ange en ekvation för tangenten till cirkeln i punkten $(3, -6)$.
3. (4p) Givet att $x = 1$ är en nollställe till $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, faktorisera polynomet.
4. (4p) Derivera funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

5. Bestäm alla vertikala och horisontella asymptoter till

- a. (3p)

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{2(x-2)^2}$$

- b. (3p)

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}.$$

6. (4p) En funktion $f(x)$ definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ av ekvationen

$$2f(x) + \sin f(x) = x^2.$$

Hitta alla x för vilka $f'(x) = 0$.

Del 2: Överbetygsdelen

7. a. (2p) Ge den matematiska definitionen för gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

b. (2p) Använd definitionen för att visa att

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

8. (3p) Välj konstanterna a, b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 1$.

9. a. (3p) Visa att om f och g är deriverbara i a med $g'(a) \neq 0$ så är

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

b. (2p) Använd (a) för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

Anonym kod	MVE530 Inledande matematik 2021–10-26	sidnummer 1	Poäng
------------	---	-----------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats
(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- a. (3p) Lös olikheten $|2x - 3| \geq 1$.

Lösning:

Olikheten $|2x - 3| \geq 1$ är ekvivalent med

$$2x - 3 \geq 1 \quad \text{eller} \quad 2x - 3 \leq -1.$$

Den första olikheten ger $x \geq 2$, den andra ger $x \leq -1$.

Svar: $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$.

- b. (3p) Hitta derivatan till $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$.

Lösning: Produktregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)' \sin x + (x^2 + 1)(\sin x)' \\ &= 2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x. \end{aligned}$$

Svar: $2x \sin x + (x^2 + 1) \cos x$.

- c. (3p) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - x^2}.$$

Lösning: Täljaren och nämnaren har faktoriseringar

$$2x^2 - 6x + 4 = (x - 2)(2x - 2), \quad 2x - x^2 = -x(x - 2).$$

Då är

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 2}{-x} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Svar: -1 .

- d. (3p) Hitta inversen till $f(x) = 4 + e^{-2x}$.

Lösning: Vi löser ut x ur ekvationen

$$y = 4 + e^{-2x},$$

och får

$$x = -\frac{1}{2} \ln(y - 4).$$

Vi läser av att

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} \ln(y - 4).$$

Svar: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \ln(x - 4).$

- e. (3p) Använd derivatans definition för att derivera $f(x) = 1/x$.

Lösning: Enligt derivatans definition gäller för alla $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Svar: $-1/x^2$.

Övriga lösningar

2. a. Kvadratkomplettering i x respektive y ger

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9, \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4.$$

Cirkelns ekvation kan då skrivas om

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 - 3 = 0,$$

eller

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Det avläses att cirkelns centrum är $(3, -2)$, och dess radie $\sqrt{16} = 4$.

- b. Det finns två huvudsakliga lösningar.

- i. Vi deriverar cirkelns ekvation med avseende på x och får

$$2x - 6 + 2y \cdot y' + 4y' = 0,$$

alltså $y' = (6 - 2x)/(4 + 2y)$. Genom att stoppa in $(x, y) = (3, -6)$ ser vi att tangentens lutning är 0. Eftersom tangenten går genom $(3, -6)$ är dess ekvation $y = -6$. (Enpunktsformeln ger samma.)

- ii. Notera att punkten $(3, -6)$ ligger rakt nedanför cirkelns centrum $(3, -2)$. Med hänvisning till symmetri måste då tangenten vara horisontell, och ges av $y = -6$.

3. Faktorsatsen ger att $x - 1$ är en faktor till $p(x)$. Genom polynomdivision (eller genom skarp observation) ses att

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 4).$$

Konjugatregeln ger $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Alltså är $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 2)$.

4. Vi kommer använda att

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx} x^2 = 2x.$$

Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2} \\ &= \frac{1}{2 - x^2} \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \frac{d}{dx} (1 - x^2) \\ &= \frac{-2x}{2(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{-x}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

5. a. Funktionen är kontinuerlig överallt utom i $x = 2$, där möjlighet för en vertikal asymptot finns. Vi försöker beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{2(x - 2)^2}.$$

Faktorisering av täljaren ger $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$. Vi drar slutsatsen att

$$f(x) = \frac{x - 4}{2(x - 2)}, \quad x \neq 2.$$

Det är nu tydligt att $x = 2$ är en vertikal asymptot till f .

Horisontella asymptoter finner vi genom att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-4/x}{2-4/x} = \frac{1}{2}.$$

Vi drar slutsatsen att $y = 1/2$ är en horisontell asymptot till f . Beräkning av gränsvärdet då $x \rightarrow -\infty$ ger också $1/2$, vilket inte ger någon ny asymptot.

Svar: $x = 2$ och $y = 1/2$.

- b. Funktionen definitionsmängd är $D_f = (1, \infty)$, och funktionen är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd. Den enda möjliga vertikala asymptoten är $x = 1$, och vi inser lätt (då $\sin 1 > 0$) att

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Alltså är $x = 1$ en vertikal asymptot till f .

För att hitta en horisontell asymptot beräknar vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$$

med hjälp av instängningssatsen. Vi har $-\frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, och

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0,$$

och drar slutsatsen att $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

Svar: $x = 1$ och $y = 0$.

6. Vi deriverar den definierande funktionen implicit med avseende på x och får

$$2f'(x) + f'(x) \cos f(x) = 2x.$$

Lös ut $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2 + \cos f(x)}.$$

Nämnaren är garanterat positiv, så vi har $f'(x) = 0$ om och endast om täljaren är noll, det vill säga $x = 0$.

7. a. Vi säger att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $x \neq a$ och $|x - a| < \delta$ medför att $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b. Låt $\varepsilon > 0$ och antag att x är sådant att $|x - 2| < \varepsilon/3$. Då är

$$|(3x - 1) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Detta visar att

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

8. Funktionen är deriverbar om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

existerar (kom ihåg att det ingår i existensbegreppet att gränsvärdet inte får vara $\pm\infty$).
Från höger har vi

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1) - 1}{h} = 1.$$

Från vänster har vi (notera att $f(1) = 1$)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(a(1+h)^2 + b) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah^2 + 2ah + a + b - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(ah + 2a + \frac{a+b-1}{h} \right). \end{aligned}$$

Vi ska välja a, b så att detta blir 1. Om $a + b - 1 \neq 0$ existerar inte gränsvärdet, så vi måste ha $a + b = 1$ (detta går att se enklare eftersom f måste vara kontinuerlig för att kunna vara deriverbar, och $f(x) \rightarrow a + b$ då $x \rightarrow 1^-$). Om vi har $a + b = 1$ får vi

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (ah + 2a) = 2a.$$

Detta ska matcha högergränsvärdet 1, så vi får $a = 1/2$. Från $a + b = 1$ får vi även $b = 1/2$. Vi drar slutsatsen att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 1$.

9. a. Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)^{-1} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)}.\end{aligned}$$

b. Låt $f(x) = \ln(1+x)$ och $g(x) = \sin x$. Då är $f(0) = g(0) = 0$, så

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}.$$

Detta passar formen i (a). Vi har $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ så $f'(0) = 1$, och $g'(x) = \cos x$ ger $g'(0) = 1$. Så,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$