

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: 2022-01-04

MVE530 Inledande matematik: Lösningar

Del 1: Godkänddelen

1. (15p) Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x.$$

- a. (1p) Finn $f'(x)$.
b. (2p) Finn en ekvation för tangenten till f i punkten $(2, -4)$.
c. (2p) Finn en ekvation för linjen som är vinkelrät mot f i punkten $(2, -4)$.
3. (4p) Givet att $x = 2$ är en nollställe till $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, faktorisera polynomet.
4. (4p) Derivera funktionen

$$f(x) = \cos(\ln(2x)).$$

5. Bestäm alla vertikala och horisontella asymptoter till

- a. (3p)

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3},$$

- b. (3p)

$$f(x) = e^{1/x} + e^x.$$

6. (4p) En funktion $f(x)$ definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ av ekvationen

$$f(x) + e^{f(x)} = x.$$

Beräkna $f'(1)$.

Del 2: Överbetygsdelen

7. a. (2p) Ange den matematiska definitionen för en hoppdiskontinuitet.

b. (2p) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

har en diskontinuitet i $x = 0$. Ange dess typ.

8. Låt f och g vara funktioner med definitions- och värdemängder

$$\begin{aligned} D_f &= [0, \infty), & V_f &= \mathbb{R}, \\ D_g &= \mathbb{R}, & V_g &= (0, \pi). \end{aligned}$$

a. (2p) Ange definitionsmängden för sammansättningen $f \circ g(x) = f(g(x))$.

b. (2p) Anta att f och g är injektiva. Visa att $f \circ g$ är injektiv.

9. (4p) Härled produktregeln med hjälp av derivatans definition.

Anonym kod	MVE530 Inledande matematik 2022-01-04	sidnummer 1	Poäng
------------	---	-----------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats
(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- a. (3p) Lös olikheten $|4 - 2x| < 2$.

Lösning:

Olikheten $|4 - 2x| < 2$ är ekvivalent med

$$4 - 2x < 2 \quad \text{och} \quad 4 - 2x > -2.$$

Den första har lösning $x > 1$, den andra $x < 3$.

Svar: $1 < x < 3$.

- b. (3p) Hitta derivatan till $f(x) = (\sin x + 1)^3$.

Lösning: Kedjeregeln tillämpas med $f(x) = g(h(x))$ där $g(x) = x^3$ och $h(x) = \sin x + 1$. Då är $g'(x) = 3x^2$ och $h'(x) = \cos x$, och

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= 3(\sin x + 1)^2 \cos x. \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = 3(\sin x + 1)^2 \cos x$.

- c. (3p) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - x^2}.$$

Lösning: Täljaren och nämnaren har faktoriseringar

$$2x^2 - 6x + 4 = (x - 2)(2x - 2), \quad 2x - x^2 = -x(x - 2).$$

Då är

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 2}{-x} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Svar: -1 .

- d. (3p) Hitta inversen till $f(x) = \ln(3x - 4)$.

Lösning: Vi löser ut x ur ekvationen

$$y = \ln(3x - 4),$$

och får

$$x = \frac{e^y + 4}{3}.$$

Vi läser av att

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y + 4}{3}.$$

Svar: $f^{-1}(x) = (e^x + 4)/3$.

- e. (3p) Använd derivatans definition för att derivera $f(x) = 1/x$.

Lösning: Enligt derivatans definition gäller för alla $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Svar: $-1/x^2$.

Övriga lösningar

2. Låt

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x.$$

- a. (1p) Finn $f'(x)$.

Lösning: För polynom gäller $(x^n)' = nx^{n-1}$, och vi får $f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$.

- b. (2p) Finn en ekvation för tangenten till f i punkten $(2, -4)$.

Lösning: Derivatans i punkten är $f'(2) = 12 - 16 + 2 = -2$. Enpunktsformen ger då tangentens ekvation

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2),$$

och med $f(2) = -4$ och $f'(2) = -2$ fås tangentens ekvation

$$y = -2x.$$

- c. (2p) Finn en ekvation för linjen som är vinkelrät mot f i punkten $(2, -4)$.

Lösning: Lutningen k hos den vinkelräta linjen kommer uppfylla $kf'(2) = -1$, och alltså är $k = 1/2$. Enpunktsformen ger vinkelräta linjens ekvation

$$y = f(2) + k(x - 2) = -4 + \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{x}{2} - 5.$$

3. (4p) Givet att $x = 2$ är en nollställe till $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, faktorisera polynomet.

Lösning: Enligt faktorsatsen är $x - 2$ en faktor till polynomet. Polynomdivision ger

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = x^2(x - 2) + 2x^2 - 4x^2 - 4x + 16 \\ &= x^2(x - 2) - 2x^2 - 4x + 16 \\ &= x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - 4x - 4x + 16 \\ &= x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - 8x + 16 \\ &= x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - 8(x - 2) \\ &= (x^2 - 2x - 8)(x - 2). \end{aligned}$$

Vi faktorerar $x^2 - 2x - 8$ genom att hitta dess lösningar $x = 4$ och $x = -2$ med valfri metod, och får

$$p(x) = (x^2 - 2x - 8)(x - 2) = (x - 4)(x + 2)(x - 2).$$

4. (4p) Derivera funktionen

$$f(x) = \cos(\ln(2x)).$$

Lösning: Kedjeregeln tillämpas med $g(x) = \cos x$, $h(x) = \ln x$, $k(x) = 2x$. Då är $f'(x) = -\sin x$, $h'(x) = \frac{1}{x}$, $k'(x) = 2$, och

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(k(x)))h'(k(x))k'(x) \\ &= -\cos(\ln(2x))\frac{1}{2x}2 \\ &= -\frac{\cos(\ln(2x))}{x}. \end{aligned}$$

5. Bestäm alla vertikala och horisontella asymptoter till

a. (3p)

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3},$$

Lösning: Funktionen är rationell. För eventuella horisontella asymptoter beräknas gränsvärdena vid oändligheten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4/x + 1/x^2}{1 - 4/x + 3/x^2} = 3.$$

Vi drar slutsatsen att $y = 3$ är en horisontell asymptot. Samma resultat fås då $x \rightarrow -\infty$.

För eventuella vertikala asymptoter behöver vi veta när nämnaren blir 0. Detta händer då $x = 3$ och $x = 1$, så dessa är våra potentiella vertikala asymptoter. Vi testar att sätta in värdena i hela uttrycket och får " $f(3) = 16/0$ " och " $f(1) = 0/0$ ". I det här läget drar vi slutsatsen att $x = 3$ är en vertikal asymptot, medan statusen för $x = 1$ fortfarande är oklar. Faktorsatsen ger att $x - 1$ är en faktor i såväl täljare som nämnare, och vi faktorerar: för $x \neq 1$ gäller

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{3x-1}{x-3}.$$

Det är nu tydligt att $f(x) \rightarrow -1$ då $x \rightarrow 1$, så $x = 1$ är inte en vertikal asymptot.

Svar: $y = 3$ och $x = 3$.

b. (3p)

$$f(x) = e^{1/x} + e^x.$$

Lösning: Funktionen har definitionsmängd $D_f = \{x \mid x \neq 0\}$, så den enda möjliga vertikala asymptoten är $x = 0$. Högergränsvärdet i $x = 0$ är $+\infty$, så därför är $x = 0$ en vertikal asymptot. (Det spelar då ingen roll att $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.)

Vid oändligheten gäller

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} + e^x &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} + e^x &= \infty, \end{aligned}$$

och vi drar slutsatsen att $y = 1$ är en horisontell asymptot.

Svar: $y = 1$ och $x = 0$.

6. (4p) En funktion $f(x)$ definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ av ekvationen

$$f(x) + e^{f(x)} = x.$$

Beräkna $f'(1)$.

Lösning: Ekvationen deriveras med avseende på x . Med hjälp av kedjeregeln fås

$$f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 1.$$

För att beräkna $f'(1)$ behöver vi känna till $f(1)$. Detta fås genom att lösa ekvationen

$$f(1) + e^{f(1)} = 1,$$

med lösning $f(1) = 0$. Alltså är

$$f'(1) + f'(1)e^0 = 1,$$

vilket ger $f'(1) = 1/2$.

7. a. (2p) Ange den matematiska definitionen för en hoppdiskontinuitet.

Lösning: En funktion f har en hoppdiskontinuitet i a om de ensidiga gränsvärdena

$$V = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

$$H = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

existerar och uppfyller $V \neq H$.

- b. (2p) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

har en diskontinuitet i $x = 0$. Ange dess typ.

Lösning: De ensidiga gränsvärdena i $x = 0$ är

$$V = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \cos(0) = 1,$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-0} = 1.$$

Eftersom $V = H$ är diskontinuiteten av typen hävbar diskontinuitet.

8. Låt f och g vara funktioner med definitions- och värdemängder

$$\begin{aligned} D_f &= [0, \infty), & V_f &= \mathbb{R}, \\ D_g &= \mathbb{R}, & V_g &= (0, \pi). \end{aligned}$$

- a. (2p) Ange definitionsmängden för sammansättningen $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Lösning: Definitionsmängden för en sammansättning är generellt

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}.$$

Eftersom $V_g \subseteq D_f$ är kravet $g(x) \in D_f$ alltid uppfyllt, och vi har $D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}$.

b. (2p) Anta att f och g är injektiva. Visa att $f \circ g$ är injektiv.

Lösning: Anta att $x_1, x_2 \in D_{f \circ g}$ är sådana att

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)).$$

Eftersom f är injektiv måste vi ha $g(x_1) = g(x_2)$. Eftersom g är injektiv måste då $x_1 = x_2$ gälla. Detta visar att $f \circ g$ är injektiv.

9. (4p) Härled produktregeln med hjälp av derivatans definition.

Lösning: Låt f, g vara två funktioner som är deriverbara i en punkt a , och låt $h(x) = f(x)g(x)$. Då är

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(a+x) - h(a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x)g(a+x) - f(a)g(a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x)g(a+x) - f(a+x)g(a) + f(a+x)g(a) - f(a)g(a)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(a+x) \frac{g(a+x) - g(a)}{x} + g(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} \\ (*) &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(a+x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(a+x) - g(a)}{x} \right) + g(a)f'(a) \\ &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a). \end{aligned}$$

Steget (*) motiveras genom att

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x)G(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} F(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} G(x) \right)$$

alltid håller så länge de två separata gränsvärdena i högerledet existerar.