

MVE530 Inledande matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringslistan och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. För godkänt på tentan krävs totalt 23 poäng från tentans två delar. För betyg 4 resp. 5 krävs 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkändtdelen (38p)

1. (15p) Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. En cirkel ges av ekvationen

$$(x - 2)^2 + y^2 = 25.$$

- a. (2p) Finn en ekvation för linjen genom cirkelns medelpunkt och punkten $(5, 4)$.

- b. (3p) Finn en ekvation för tangenten till cirkeln i punkten $(5, 4)$.

3. (4p) Utför polynomdivisionen (ange kvot och rest)

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 2x}{x^2 + 1}.$$

4. (4p) Derivera funktionen

$$f(x) = x^3 \sin(x^2).$$

5. Bestäm alla vertikala och horisontella asymptoter till

- a. (3p)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3},$$

- b. (3p)

$$f(x) = e^{-1/x^2} + e^{-x^2}.$$

6. (4p) En funktion $f(x)$ definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ av ekvationen

$$f(x) + e^{f(x)} = x.$$

Beräkna $f'(1)$.

Del 2: Överbetygsdelen (12p)

7. a. (2p) Ange den matematiska definitionen för en hoppdiskontinuitet.

b. (2p) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

har en diskontinuitet i $x = 0$. Ange dess typ.

8. Antag att f är en strängt avtagande funktion med $D_f = (0, \infty)$ och $V_f = \mathbb{R}$, och att $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$.

(a) (2p) Ange definitionen för vad det innebär att

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

(b) (1p) En invers f^{-1} existerar för f . Förklara hur vi kan dra den slutsatsen från de givna villkoren.

(c) (1p) Ange $D_{f^{-1}}$ och $V_{f^{-1}}$.

(d) (4p) Bevisa att

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = 0.$$

Anonym kod	MVE530 Inledande matematik 2022–08–16	Sida 1
------------	---	------------------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats
(endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

a. (3p) Lös olikheten $|3 + x| \geq 2$.

Svar:

b. (3p) Hitta derivatan till $f(x) = (e^x - 1)^3$.

Svar:

Anonym kod	MVE530 Inledande matematik 2022-08-16	Sida 2
------------	---	------------------

c. (3p) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - x^2}.$$

Svar:

d. (3p) Hitta inversen till $f(x) = e^{3x} - 4$.

Svar:

Anonym kod	MVE530 Inledande matematik 2022-08-16	Sida 3
------------	---	------------------

e. (3p) Använd derivatans definition för att derivera $f(x) = 1/x$.

Svar:

Lösningar

1. (a) En olikhet $|y| \geq a$ är ekvivalent med att minst en av olikheterna $y \geq a$ och $y \leq -a$ håller. I vårt fall får vi

$$3 + x \geq 2, \quad \text{och} \quad 3 + x \leq -2.$$

Den första olikheten ger $x \geq -1$, den andra ger $x \leq -5$.

Svar: $(-\infty, -5] \cup [-1, \infty)$, men det går bra att skriva " $x \leq -5$ eller $x \geq -1$ " eller dylikt.

- (b) Vi använder kedjeregeln;

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x),$$

med $f(x) = x^3$ och $g(x) = e^x - 1$. Vi har $f'(x) = 3x^2$ och $g(x) = e^x$, och får då

$$3g(x)^2 g'(x) = 3(e^x - 1)^2 e^x.$$

Detta behöver inte förenklas längre, men om man vill det får man

$$3e^{3x} - 6e^{2x} + 3e^x.$$

(En alternativ lösningsmetod är att utveckla $(e^x - 1)^3$ från början.)

- (c) Vi noterar att insättning av $x = 2$ ger

$$\frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 \cdot 2 - 2^2},$$

vilket är av formen $0/0$. Vi faktorerar och förkortar;

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x - x^2} = \frac{(x-2)(x-1)}{-x(x-2)} = \frac{x-1}{-x}.$$

Insättning av $x = 2$ ger nu $-1/2$, vilket är gränsvärdet vi söker.

- (d) Vi sätter

$$y = e^{3x} - 4,$$

och löser ut x :

$$e^{3x} = y + 4 \implies x = \frac{1}{3} \ln(y + 4).$$

Inversen är då

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3} \ln(y + 4).$$

(e) Enligt derivatans definition gäller för alla $x \neq 0$ att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

2. (a) Vi läser av att cirkelns medelpunkt är $(2, 0)$. Linjen genom punkterna $(2, 0)$ och $(5, 4)$ har lutning

$$k = \frac{4 - 0}{5 - 2} = \frac{4}{3}.$$

En ekvation för linjen ges då av

$$y - 0 = \frac{4}{3}(x - 2),$$

eller

$$y = \frac{4x - 8}{3}.$$

- (b) Enklaste lösningen är att notera att linjen från (a) kommer vara vinkelrät mot linjen vi söker här i (b). Men om man inte ser den metoden, så kan man derivera cirkelns ekvation implicit med avseende på x och få

$$2(x - 2) + 2yy' = 0,$$

vilket ger

$$y' = -\frac{x - 2}{y}.$$

Vi stoppar in $x = 5$ och $y = 4$, vilket ger

$$y' = -\frac{3}{4}.$$

Tangenten i punkten har alltså lutning $-3/4$, och linjens ekvation är

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 5),$$

eller

$$y = -\frac{3x}{4} + 4 + \frac{15}{4} = \frac{31 - 3x}{4}.$$

3. (Ställ upp med liggande stolen) Vi har

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^2 + 2x &= x^2(x^2 + 1) - 5x^2 + 2x \\ &= x^2(x^2 + 1) - 5(x^2 + 1) + 2x + 5.\end{aligned}$$

Kvoten är $x^2 - 5$, och resten är $2x + 5$.

4. Vi använder i första hand produktregeln

$$(a(x)b(x))' = a'(x)b(x) + a(x)b'(x),$$

med $a(x) = x^3$ och $b(x) = \sin(x^2)$. För att hitta $b'(x)$ behöver vi använda kedjeregeln. Vi skriver $b(x) = c(d(x))$ där $c(x) = \sin x$ och $d(x) = x^2$. Då är

$$b'(x) = c'(d(x))d'(x).$$

Vi får då

$$f'(x) = a'(x)b(x) + a(x)b'(x) = a'(x)b(x) + a(x)c'(d(x))d'(x).$$

Funktionerna a, c, d kan vi derivera; vi har $a'(x) = 3x^2$, $c'(x) = \cos x$, och $d'(x) = 2x$. Så

$$f'(x) = 3x^2 \sin(x^2) + x^3 \cos(x^2) 2x = 3x^2 \sin(x^2) + 2x^4 \cos(x^2).$$

5. (a) Vi faktorerar täljare och nämnare och förkortar:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x(x - 1)}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{2x}{x - 3}.$$

Vi ser att $x = 3$ är en vertikal asymptot, då nämnaren är noll men täljaren nollskild i denna punkt.

För att hitta eventuella horisontella asymptoter tar vi gränsvärden då $x \rightarrow \pm\infty$. Vi har

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 2/x}{1 - 4/x + 3/x^2} = 2,$$

så $y = 2$ är en horisontell asymptot. Gränsvärdet vid $-\infty$ ger samma asymptot.

Svar: $x = 3$ och $y = 2$.

- (b) Den enda punkten där funktionen inte är definierad är $x = 0$, så detta är vår enda möjliga vertikala asymptot. Det inses att

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0,$$

så $f(x) \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$. Funktionen saknar vertikala asymptoter.

För horisontella asymptoter låter vi $x \rightarrow \infty$. Vi kan notera att funktionen är jämn, så vi behöver inte bry oss om $x \rightarrow -\infty$. Vi har

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-1/x^2} + e^{-x^2} = 1 + 0 = 1.$$

Så $y = 1$ är en horisontell asymptot, funktionens enda asymptot.

6. Ekvationen deriveras med avseende på x . Med hjälp av kedjeregeln fås

$$f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 1.$$

För att beräkna $f'(1)$ behöver vi känna till $f(1)$. Detta fås genom att lösa ekvationen

$$f(1) + e^{f(1)} = 1,$$

med lösning $f(1) = 0$. Alltså är

$$f'(1) + f'(1)e^0 = 1,$$

vilket ger $f'(1) = 1/2$.

7. (a) En funktion f har en hoppdiskontinuitet i a om de ensidiga gränsvärdena

$$V = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

$$H = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

existerar och uppfyller $V \neq H$.

- (b) De ensidiga gränsvärdena i $x = 0$ är

$$V = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \cos(0) = 1,$$

$$H = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-0} = 1.$$

Eftersom $V = H$ är diskontinuiteten av typen hävbar diskontinuitet.

8. (a) För varje $N \in \mathbb{R}$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $0 < x < \delta$ medför $f(x) > N$.
(b) Funktionen f är strängt avtagande, och därmed injektiv. (Informellt: varje horisontell linje skär funktionens kurva i högst en punkt.)

- (c) $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} = D_f = (0, \infty)$.
- (d) Vi noterar att f^{-1} måste vara strängt avtagande; antag att $y_1 < y_2$ och låt $x_1 = f^{-1}(y_1)$ och $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Då är

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2),$$

och eftersom f är strängt avtagande drar vi slutsatsen att $x_1 < x_2$.

Det räcker nu att notera att $V_{f^{-1}} = (0, \infty)$. En strängt avtagande funktion med denna värdemängd måste ha gränsvärde 0.