

LMA212 del B
Exempel på tentamensuppgifter

1. Låt M vara en 3×3 -matris med kolonner $\bar{a}$, $\bar{b}$ och $\bar{c}$ sådana att $3\bar{a} - 5\bar{b} = 2\bar{c}$

Bestäm $\det M$

(4p)

Svar: kolonnerna är linjärt beroende så $\det M = 0$

2. Använd minsta kvadratmetoden för att anpassa punkterna $(-6,-1)$, $(-2,2)$, $(1,1)$ och $(7,6)$ till en rät linje.

(5p)

Svar: $y = \frac{x}{2} + 2$

3. Bestäm för vilka värden på konstanten s systemet $\begin{cases} 2sx + y = 1 \\ 3sx + 6sy = 2 \end{cases}$

har en entydig lösning. Använd Cramers regel för att bestämma lösningen i sådana fall.

(4p)

Svar: entydig lösning om $s \neq 0$, $s \neq \frac{1}{4}$

I så fall är $x = \frac{6s-2}{3s(4s-1)}$ och $y = \frac{1}{12s-3}$

4. Bestäm inversen till $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(3p)

Svar: $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. Låt A vara en kvadratisk matris med egenskapen $A^2 = 0$.

Bestäm talen x och y så att $(A - I)^{-1} = xA + yI$

(4p)

Svar: eftersom $(A - I)(A + I) = A^2 - I^2 = -I$ är $x = y = -1$

6. Bestäm matrisen X så att $(AX)^t + 2A = B$

om $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (5p)

Svar: $X^t = (B - 2A)(A^t)^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$

7. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (2p)

Svar: -6

8. Låt $M = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$.

Bestäm, för varje värde på konstanten a , antalet lösningar till systemet $Mx = b$. (6p)

Svar: för $a=0$ finns oändligt många lösningar, för $a=2$ och $a=-1$ saknas lösning, för övriga värden på a är lösningen entydig.

9. Antag att vektorerna v_1, v_2, v_3, v_4 är linjärt oberoende. Vet vi säkert att v_1, v_2, v_3 är linjärt oberoende? (4p)

Svar: ja. Om det funnes en linjärkombination med de tre första vektorerna skulle den även gälla alla fyra.

10. För vilka värden på konstanten a är vektorerna $(0,1,a)$, $(1,2,a+3)$ och $(4,-1,0)$ linjärt beroende? (3p)

Svar: $a = 12/5$

11. Ett plan genom origo innehåller vektorerna $(1,2,4)$ och $(-2,1,3)$. Bestäm det villkor som gör att även vektorn (x,y,z) ligger i planet.

Bestäm med hjälp av detta planets ekvation.

(4p)

Svar: $\det(M) = 0$ där $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 3 & z \end{pmatrix}$; $2x - 11y + 5z = 0$

12. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x & -3z & = & 8 \\ 2x & +2y & +9z & = & 7 \\ & y & +5z & = & -2 \end{cases}$$

Använd lösningen för att skriva vektorn $(8,7,2)$ som en linjärkombination av vektorerna $(1,2,0)$, $(0,2,1)$ och $(-3,9,5)$

(3p)

Svar: $(x,y,z) = (5,3,-1)$; $(8,7,-2) = 5(1,2,0) + 3(0,2,1) - (-3,9,5)$

13. Låt A och B vara två 4×4 -matriser.

- a. Antag att de två första kolonnerna i B är lika.
Vad kan man säga om kolonnerna i AB?

(2p)

Svar: de två första är lika.

- b. Antag i stället att den sista kolonnen i AB består av enbart nollor, men att ingen kolonn i B består av enbart nollor. Vad kan man säga om kolonnerna i A?

(4p)

Svar: de är linjärt beroende.