

Svar eller ofullständiga lösningar.

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ (2p)

Svar: 12

2. Lös matrisekvationen $AXB + B = C$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4p)

Svar: $X = A^{-1}(CB^{-1} - I) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

3. Bestäm konstanten s så att vektorerna $a = (1, -1, 4)$, $b = (2, -3, 5)$
och $c = (-1, s, 2)$ blir linjärt beroende.
För detta värde på s , skriv c som en linjärkombination av a och b . (4p)

Lösning: sätt $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & s \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ som reduceras till $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-s \\ 0 & 0 & 9-3s \end{pmatrix}$

Vektorerna är alltså linjärt beroende om $s=3$, och en lösning till $Mx = 0$ är till exempel $x = (-3, 2, 1)$ så $c = 3a - 2b$

4. Använd minsta kvadratmetoden för att anpassa punkterna $(1, 5)$,
 $(2, 4)$, $(3, 4)$ och $(4, 3)$ till en rät linje $y = kx + m$ (5p)

Lösning: Systemet är $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ som skall multipliceras med transponatet
till den första matrisen; vi får då $\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 16 \end{pmatrix}$ så att $k = -\frac{3}{5}$, $m = \frac{11}{2}$

5. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & s \\ s & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 1 \\ s-2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestäm, för alla värden på konstanten s , antalet lösningar till systemet $Ax = b$

(6p)

Lösning: vi beräknar först determinanten för A : $\det A = 12 - s - s^2$

För $s=3$ får vi systemet $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ som har oändligt många lösningar.

För $s=-4$ får vi $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ som saknar lösning.

Svar: $s = 3$ ger oändligt många lösningar, $s = -4$ ger ingen lösning, alla andra s -värden ger entydig lösning.

6. Låt $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$, där $a, b, c, \dots, h$ är okända konstanter.

a. Beräkna $u^t v$

(1p)

Svar: $ae + bf + cg + dh$

b. Beräkna $\det(uv^t)$

(3p)

Svar: kolonnerna är parallella så determinanten är $= 0$.