

Måndag 3 januari 2022 kl 14.00 – 16.00

Svar eller kortfattade lösningar

1. Bestäm alla värden på konstanten a som gör att

$$\text{determinanten } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & a+1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3a-1 \end{vmatrix} \text{ blir } = 0 \quad (3p)$$

Svar: $a = -1$ respektive $a = 1/3$

2. Visa att systemet $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ saknar lösning.

Bestäm en approximativ lösning till systemet genom att använda minsta kvadratmetoden.

(5p)

Lösning: Eliminering ger ekvationen $0 = 1$.

$$\text{Minsta kvadratlösningen är lösningen till } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs } \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}. \text{ Vi får } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -14 \\ 27 \end{pmatrix}$$

3. Låt $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

- a. Lös systemet $Mx = b$ genom att bestämma inversen till M .

(3p)

$$\text{Svar: } M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } x = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- b. Använd resultatet i a. till att skriva vektorn b som en linjärkombination av vektorerna $(2, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$ och $(-2, -1, 1)$

(2p)

$$\text{Svar: } b = 2(2, 1, 1) - (1, -1, -1) + 3(-2, -1, 1)$$

4. Ange ett villkor på talen x , y och z så att vektorerna $(2, 5, 1)$, $(3, -2, 1)$ och (x, y, z) är linjärt beroende.

Använd detta villkor för att bestämma en ekvation för det plan genom origo som innehåller vektorerna $(2, 5, 1)$ och $(3, -2, 1)$.

(4p)

$$\text{Svar: } \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 5 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 19z = 0$$

5. Låt t vara en konstant, $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Bestäm alla de t som gör A inverterbar och lös sedan systemet $Ax = b$ med hjälp av Cramers regel.

(3p)

Svar: eftersom $\det(A) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ är A inverterbar för alla t .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & -\sin t \\ \cos t & \cos t \end{vmatrix}}{1} = \sin 2t, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}}{1} = \cos 2t$$

6. Låt $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ och antag

$$\text{att } a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 0.$$

Bestäm inversen till M eller visa att inversen inte existerar.

(5p)

Svar: summan av kolonnerna är 0, alltså är kolonnvektorerna linjärt beroende, alltså är matrisen ej inverterbar.