1a) Lösning: LT av ekvationen ger:

$$s^2\tilde u - s\underbrace{u(0)}_{=0} - \underbrace{u'(0)}_{=0} + 2(s\tilde u - \underbrace{u(0)}_{=0}) + \tilde u = \tilde g$$

$$\Longrightarrow (s^2+2s+1)\tilde u = \tilde g \Rightarrow \tilde u = \frac{1}{s^2+2s+1}\tilde g$$

$$\frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} = -\left(\frac{1}{s+1}\right)', \quad \widetilde{e^{-t}} = \frac{1}{s+1} \Longrightarrow$$

$$\widetilde{te^{-t}} = -\left(\frac{1}{s+1}\right)' = \frac{1}{s^2+2s+1}, \quad \text{så}$$

$$\tilde u = \widetilde{te^{-t}}\,\tilde g \underset{\text{Prop.}}{=} \widetilde{te^{-t}*g} \underset{\text{IF}}{\Longrightarrow} u = te^{-t}*g.$$

Svar: $u = te^{-t}*g$, dvs $u(t)=\int_0^t re^{-r}g(t-r)\,dr$

1 b) Lösning: Från a) ser vi att

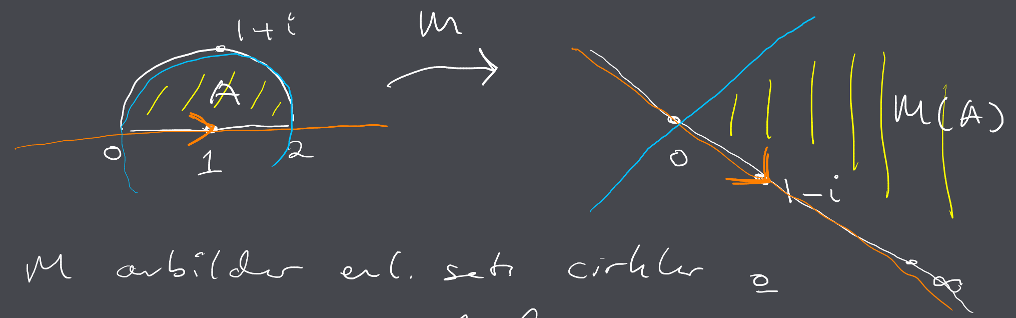
$$u(2) = \int_0^2 re^{-r}g(2-r)\,dr = \int_1^2 \cancel{r}e^{-r}\frac{1}{\underbrace{2-(2-r)}_{=\cancel{r}}}\,dr = \int_1^2 e^{-r}\,dr =$$

$$= \left[-e^{-r}\right]_1^2 = -e^{-2}+e^{-1} = \frac{e-1}{e^2}.$$

Svar: $u(2) = \frac{e-1}{e^2}$

2. Lösning: Vi noterar att $f = \mathrm{Log}\, z \circ z^2 \circ M(z)$.

Vi bestämmer därför först $M(A)$.



M avbildar enl. sats cirklar o linjer på cirklar el. linjer. Vi ser att

$M(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ = cirkel el. linje genom $0, 1-i, \infty$ = linjen genom $0, 1-i$, dvs $x+y=0$.

$M(C(1,1))$ = cirkel el. linje genom $0, \infty$ = linje genom 0, och tack vare att M konform måste denna linje skära $x+y=0$ i rät vinkel, dvs vi får linjen $x=y$.

Det följer att $M(A)$ är begränsad av dessa två linjer. M h a konformitet får vi som i figur att $M(A)$ ligger till vänster om linjen $x+y=0$ när du går från 0 till $1-i$ och sedan ∞,

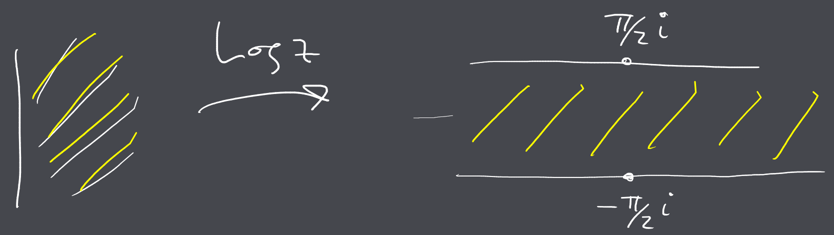
dvs $M(A) = \{z : |z|>0, -\pi/4 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/4\}$.

Vi noterar sedan att $z^2(M(A)) = \{z^2 : |z|>0, -\pi/4 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/4\} =$

$= \{z : |z|>0,\ -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2\} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$

$\operatorname{Log}(\{z : |z|>0,\ -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2\}) = \{\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) : |z|>0,$

$-\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2\} = \{z :\ -\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$



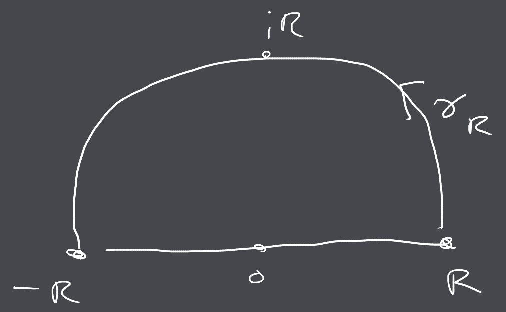
Svar: $f(A) = \{z : -\pi/2 < \operatorname{Im}(z) < \pi/2\}$

3. Vi noterar att $\sin 2x = \operatorname{Im}(e^{2ix})$, och därför

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{2ix})}{x^2+2x+2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\right)dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\,dx\right).$$

Sedan noterar vi också att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(z)\,dz$,

$$g(z) := \frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}.$$



Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$,

$\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$

Vi har nu

$$\underbrace{\int_{\sigma_R} g\,dz}_{\text{använd residykalkyl}} = \underbrace{\int_{[-R,R]} g\,dz}_{\operatorname{Im} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} g\,dz}_{\text{felterm, vill visa} \to 0}$$

Uppskattning av felterm:

$$\left|\int_{\gamma_R} g\,dz\right| \underset{\Delta \leq \int}{\leq} \max_{z\in\gamma_R} \left|\frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}\right| \pi R \leq \Big[\ |e^{2iz}| = |e^{2ix-2y}| = e^{-2y} \leq 1 \text{ ty } y \leq 0 \text{ på } \gamma_R,$$

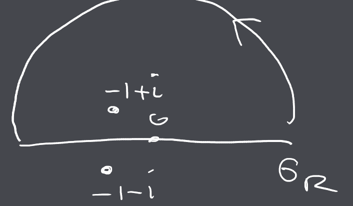
$$|z^2+2z+2| \underset{\text{omv. }\Delta}{\geq} |z|^2 - 2|z| - 2 = R^2-2R-2 \text{ på } \gamma_R\Big] \leq$$

$$\leq \frac{\pi R}{R^2-2R-2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\displaystyle\int_{\sigma_R} g\,dz$:

$z^2+2z+2 = (z+1)^2+1$, har nollst. i $-1 \pm i$, så g hol i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. i $-1\pm i$, varav

$-1+i \in \sigma_R$, $R>\sqrt{2}$



$$\operatorname{Res}_{-1+i} g \underset{\text{RRd}}{=} \left(\frac{e^{2iz}}{2z+2}\right)\Bigg|_{z=-1+i} = \frac{e^{-2i-2}}{2i}$$

$$\oint_{\sigma_R} g\,dz \underset{\text{RS}}{=} \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{e^{-2i-2}}{\cancel{2i}} = \frac{\pi e^{-2i}}{e^2}, \quad R>\sqrt{2}$$

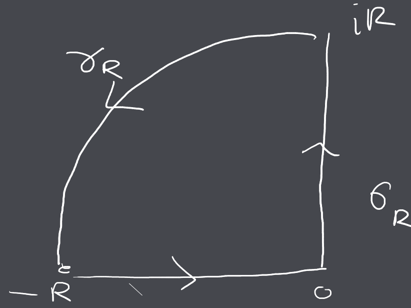
Vi såg ovan att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\sigma_R} g\,dz - \int_{\gamma_R} g\,dz\right) = \frac{\pi e^{-2i}}{e^2} - 0 =$

$\displaystyle= \frac{\pi e^{-2i}}{e^2}$, och $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi \sin(-2)}{e^2} =$

$\displaystyle= -\frac{\pi \sin 2}{e^2}$.

Svar: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{\pi \sin 2}{e^2}$

4. Lösning: Vi använder Argumentprincipen.

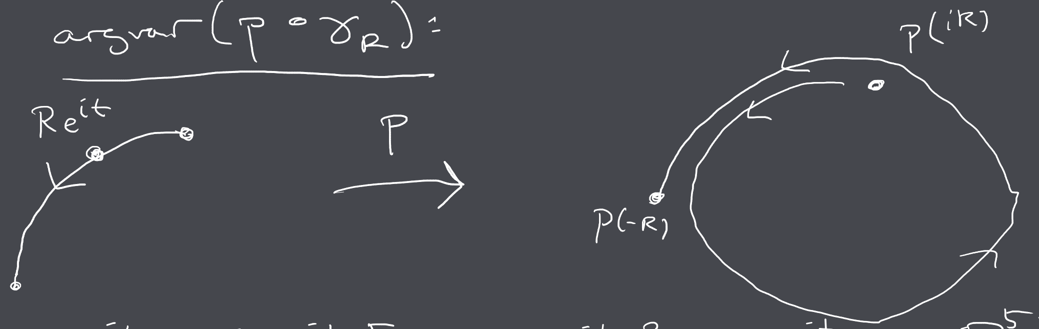


Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [\pi/2, \pi]$,

$\sigma_R := [0, iR] \cup \gamma_R \cup [-R, 0]$

Vi vill räkna ut $W(p \circ \sigma_R)$, $R>>1$, genom att beräkna argvar längs delkurvorna.

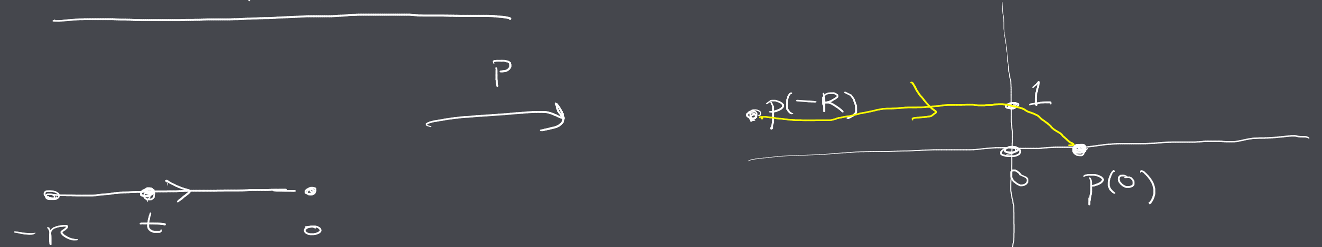
argvar$(p \circ \gamma_R)$:



$$p(Re^{it}) = (Re^{it})^5 + 2i(Re^{it})^2 + iRe^{it} + 1 = (R^5 e^{i5t})\Big(1 + \underbrace{\frac{2ie^{-3it}}{R^3} + \frac{ie^{-4it}}{R^4} + \frac{e^{-5it}}{R^5}}_{\text{litet då } R>>1}\Big) \Rightarrow \arg(p(Re^{it})) \approx 5t + 2\pi k$$

$\Rightarrow$ argvar$(p\circ\gamma_R) \approx \dfrac{5\pi}{2}$, $R>>1$.

argvar$(p \circ [-R, 0])$:



$p(t) = t^5 + 2it^2 + it + 1 = t^5 + 1 + i(2t^2 + t)$

$p(-R) = -R^5 + 1 + i\underbrace{(2R^2 - R)}_{>0} \Rightarrow \operatorname{Arg}(p(-R)) \approx \pi$

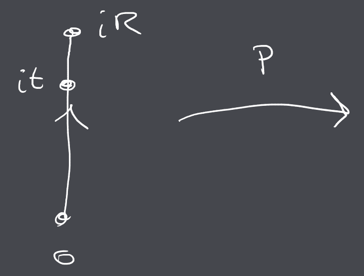
$p(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{Arg}(p(0)) = 0$

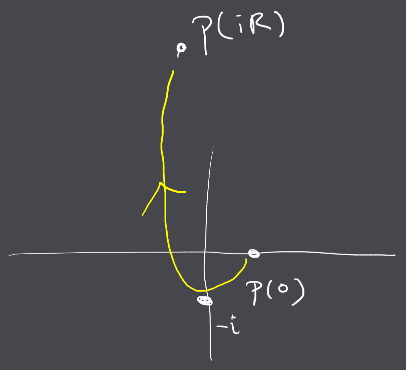
$p \circ [-R,0]$ passerar y-axeln då $\underset{t^5+1}{\underset{\parallel}{\mathrm{Re}(p(t))}} = 0$,

dvs då $t=-1$, alltså i punkten $p(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1$

Vi ser från figur att $\mathrm{argvar}(p \circ [-R,0]) \approx -\pi$

$\mathrm{argvar}(p \circ [0, iR])$:





$$p(it) = (it)^5 + 2i(it)^2 + i(it) + 1 = it^5 - 2it^2 - t + 1 =$$

$$= -t+1 + i(t^5 - 2t^2)$$

$p(0) = 1 \Rightarrow \mathrm{Arg}(p(0)) = 0$

$p(iR) = \underbrace{-R+1}_{<0} + i(R^5 - 2R^2) \Rightarrow \mathrm{Arg}(p(iR)) \approx \pi/2$, $R \gg 1$

$p \circ [0, iR]$ korsar y-axeln då $\underset{-t+1}{\underset{\parallel}{\mathrm{Re}(p(it))}} = 0$, dvs då $t = 1$,

så i punkten $p(i) = -i$. Från figur ser vi att

$\mathrm{argvar}(p \circ [0, iR]) \approx -\frac{3\pi}{2}$, $R \gg 1$

Sammantaget får vi: $W(p \circ \sigma_R) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathrm{argvar}(p \circ \gamma_R) +$
$+ \mathrm{argvar}(p \circ [-R,0]) + \mathrm{argvar}(p \circ [0, iR])\big) \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{5\pi}{2} - \pi - \frac{3\pi}{2}\right) =$
$= 0 \Rightarrow W(p \circ \sigma_R) = 0$, $R \gg 1 \underset{\text{Arg. princ.}}{\Longrightarrow}$ p har

inga nollst. i $\mathrm{int}(\sigma_R)$, $R \gg 1$, så p saknar nollst.

i $\{z : \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Svar: p har inga nollst. i $\{z : \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

7. Lösning: $\frac{p(z)}{q(z)}$ holo i $\mathbb{C}$ förutom i q:s nollst. b_i

Speciellt är $\frac{p}{q}$ holo i $A(0, r, \infty)$, om $r := \max |b_i|$.

Skriv $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_0$, $q(z) = d_m z^m + \ldots + d_0$,

där $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$. Vi har att $|p(z)| \leq |c_n||z|^n + \ldots + |c_0| \leq$

$\leq 2|c_n||z|^n$ för $|z| \geq R$ och

$|q(z)| \geq |d_m||z|^m - |d_{m-1}||z|^{m-1} - \ldots - |d_0| \geq \frac{1}{2}|d_m||z|^m$

för $|z| \geq R$ om R är valt stort nog. Eftersom $m \geq n$

får vi $\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \overset{*}{\leq} 4\frac{|c_n|}{|d_m|}|z|^{n-m} \leq 4\frac{|c_n|}{|d_m|}$ för $|z|\geq R$.

Låt nu $f(w) := \dfrac{p(1/w)}{q(1/w)}$. Vi noterar att f holo i $D(0,1/r)^{\times}$,

eftersom $\frac{1}{w}$ då ligger i $A(0,r,\infty)$. 0 är då en isol. sing.

till f. Notera att $|wf(w)| = |w|\left|\dfrac{p(1/w)}{q(1/w)}\right| \leq |w|\, 4\dfrac{|c_n|}{|d_m|}$

om $|w|\leq 1/R$, så $\lim\limits_{w\to 0} wf(w) = 0 \underset{\text{Klass. av isol. sing.}}{\Longrightarrow}$ 0 hävbar sing.,

dvs f holo i $D(0,1/r)$.

Enligt sats har f en TU i $D(0,1/r)$:

$f(w) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_k w^k$. Vi ser alltså att i $A(0,r,\infty)$ så är

$$\frac{p(z)}{q(z)} = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k},$$ dvs $\frac{p(z)}{q(z)}$ är Z-transformen av

följden $\alpha := (a_k)$, där alltså $a_k := \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Detta var vad som skulle visas.