

Komplex analys, MVE025/MVE295

2021 10 28, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

1. (a) Lös med hjälp av Laplacetransformen begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u'(0) = 0,$$

där g är en given funktion s.a. $|g(t)| \leq Ae^{Bt}$ för några konstanter A, B . Ge endast svar.

(5p)

- (b) Om

$$g(t) := \begin{cases} 1/(2-t), & \text{för } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{för } t > 1, \end{cases}$$

vad blir $u(2)$? Ge endast svar.

(3p)

2. (a) Låt $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vara Möbiusavbildningen s.a. $M(0) = 0$, $M(1) = 1 - i$ och $M(2) = \infty$, och låt $A := \{z : \operatorname{Im}(z) > 0, |z - 1| < 1\}$. Bestäm $M(A)$. Ge endast svar.

(5p)

- (b) Låt $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ och A vara som i (a) och definiera

$$f(z) := \operatorname{Log} \left(\frac{a^2 z^2 + 2abz + b^2}{c^2 z^2 + 2cdz + d^2} \right).$$

Bestäm $f(A)$. Ge endast svar.

(3p)

3. Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

(8p)

4. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till

$$p(z) := z^5 + 2iz^2 + iz + 1$$

i området $\{z : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(8p)

5. Formulera och bevisa Cauchys integralformel för derivatan av en holomorf funktion. (6p)
6. Formulera och bevisa Argumentprincipen. (6p)
7. Låt $p(z)$ vara polynom i z av grad n och $q(z)$ vara ett polynom i z av grad $m \geq 1$. Visa att om $n \leq m$ så finns en följd $\alpha := (a_k)_0^\infty$ vars Z-transform är lika med $\frac{p(z)}{q(z)}$ i någon annulus $A(0, r, \infty)$. (6p)

Lycka till!
David