Lösningsförslag MVE025/MVE295, 20220105

1a: Låt $\alpha := (a_k)$, $\beta := (b_k)$. Differensekv. kan skrivas som $S(\alpha) + \alpha = S(\beta) - \beta$, och ZT av detta ger: $Z(S(\alpha)) + Z(\alpha) = Z(S(\beta)) - Z(\beta)$ vilket efter standardräkningar ger: $Z(\alpha) = \frac{z-1}{z+1} Z(\beta)$.

Vi letar därför efter en följd $\gamma := (c_k)$ s.a. $Z(\gamma) = \frac{z-1}{z+1}$. Dessutom ser vi att $\delta := (d_k)$, $d_k = 0$ $\forall k$ ger $Z(\delta) = 0$, dvs $Z(\alpha) = Z(\beta) Z(\gamma) + Z(\gamma)$.

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - 2\frac{1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z}\frac{1}{1-(-1/z)} \overset{|z|>1}{=}$$

$$= 1 - \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1/z)^k = 1 - \frac{2}{z}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^k} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^k} =$$

$$= Z(\gamma) \quad \text{där} \quad c_k := \begin{cases} 1, & k=0 \\ 2(-1)^k, & k \geq 1. \end{cases}$$

Svar: $c_k := \begin{cases} 1, & k=0 \\ 2(-1)^k, & k \geq 1, \end{cases}$ $d_k := 0$ $\forall k$

b: $Z(\alpha) = Z(\beta) Z(\gamma) \underset{\text{Prop.}}{=} Z(\beta * \gamma)$

$\underset{\text{IF}}{\Longrightarrow}$ $\alpha = \beta * \gamma \underset{\text{Prop.}}{=} \gamma * \beta$, dvs

$$a_k = \sum_{m=0}^{k} c_m b_{k-m} = b_k + 2\sum_{m=1}^{k}(-1)^m b_{k-m}.$$

Svar: $a_k = b_k + 2\sum_{m=1}^{k}(-1)^m b_{k-m}$.

c: Från b får vi:

$$a_{100} = b_{100} + 2\sum_{m=1}^{100}(-1)^m b_{100-m} = 100\cdot(-1)^{100} +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{100}(-1)^m(100-m)(-1)^{100-m} = 100 + 2\sum_{n=1}^{99} n =$$

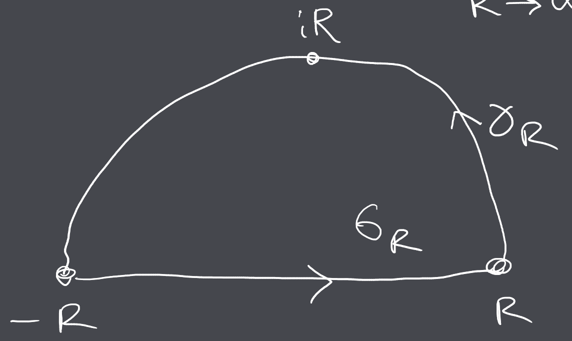
$$= 100 + \cancel{2}\cdot\frac{99\cdot 100}{\cancel{2}} = 100\cdot 100 = 10\,000.$$

Svar: $a_{100} = 10\,000$.

2: Enligt definition är $\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-itx}}{x^4+16}\,dx$.

Anta $\underline{t \le 0}$ och låt $g(z) := \frac{z e^{-itz}}{z^4+16}$.

Vi har då $\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)\,dz$.



låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0,\pi]$,

$\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$

Har då:

$$\underbrace{\int_{\sigma_R} g(z)\,dz}_{\text{Beräknas m.h.a residykalkyl}} = \underbrace{\int_{[-R,R]} g(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \hat{f}(t)} + \underbrace{\int_{\gamma_R} g(z)\,dz}_{\text{felterm, vill } \xrightarrow[R\to\infty]{} 0}$$

<u>Uppskattning av felterm:</u>

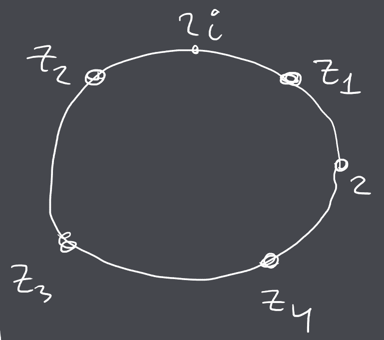
$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| \underset{\Delta\le\int}{\le} \max_{z\in\gamma_R} \frac{|z||e^{-itz}|}{|z^4+16|}\,\pi R \le \left[\begin{array}{l} |z| = R \text{ på } \gamma_R \\ |e^{-itz}| = |e^{-it(x+iy)}| = \\ = |e^{ty-itx}| = e^{ty} \le 1 \text{ på } \gamma_R \text{ ty } t\le 0,\ y \ge 0, \\ |z^4+16| \underset{\text{omv. } \Delta\ge}{\ge} |z|^4 - 16 = R^4-16 \text{ på } \gamma_R \end{array}\right] \le$$

$$\underset{R\ge 2}{\le} \frac{\pi R^2}{R^4-16} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

$g(z)$ holo i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. nollst. till

z^4+16 : $z_1 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = 2e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(-1+i)$,

$z_3 = 2e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}(-1-i)$, $z_4 = 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$,



varav $z_1, z_2 \in \mathrm{int}(\sigma_R)$, $R > 2$

$$\operatorname{Res}_{z_1} g \overset{\text{RRd}}{=} \left(\frac{\cancel{z} e^{-itz}}{4 z^{\cancel{3}2}} \right)\Bigg|_{z=z_1} = \frac{e^{-it\sqrt{2}(1+i)}}{4 \cdot 4i} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2}t}}{16i} e^{-it\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} g \overset{\text{RRd}}{=} \left(\frac{e^{-itz}}{4z^2} \right)\Bigg|_{z=z_2} = \frac{e^{-it\sqrt{2}(-1+i)}}{4\cdot(-4i)} = -\frac{e^{\sqrt{2}t}}{16i} e^{i\sqrt{2}t}$$

Vi får $\displaystyle\int_{C_R} g(z)\,dz \overset{\text{RS}}{=} 2\pi i \cdot \frac{e^{\sqrt{2}t}}{16i} \Big(\underbrace{e^{-it\sqrt{2}} - e^{i\sqrt{2}t}}_{= -2i\sin(\sqrt{2}t)} \Big) =$

$$= -\frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}t} \sin(\sqrt{2}t), \quad R>2, \text{ och därför att}$$

$$\hat{f}(t) = -\frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}t} \sin(\sqrt{2}t), \quad t \leq 0.$$

Antag nu $t \geq 0$:

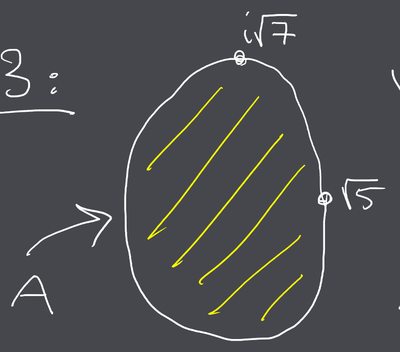
$$\hat{f}(t) \underset{\substack{\text{Lemma,}\\ f \text{ reellvärd}}}{=} \hat{f}(-t) \underset{-t\leq 0}{=} -\frac{\pi i}{4} e^{\sqrt{2}(-t)} \sin(\sqrt{2}(-t)) =$$

$$= -\frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}t} \sin(\sqrt{2}t).$$

Sammanfattningsvis får vi att

$$\hat{f}(t) = -\frac{\pi i}{4} e^{-\sqrt{2}|t|} \sin(\sqrt{2}t).$$

3:



Vi använder Rouchés sats.

Låt $f(z) := -5iz^2$, $g(z) := z^3+2$,

så $p = f+g$.

Vi noterar också att $\sqrt{5} \leq |z| \leq \sqrt{7}$ på ∂A.

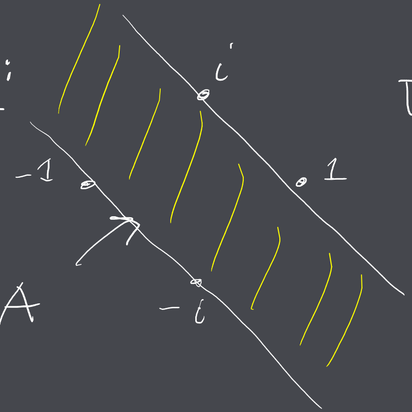
$$|f(z)| = |-5iz^2| = 5|z|^2 \geq 25$$

$$|g(z)| = |z^3+2| \overset{\Delta\leq}{\leq} |z|^3+2 \leq 7\sqrt{7}+2 \overset{\sqrt{7}<3}{<} 23$$

Vi får att $|f(z)| > |g(z)|$ på ∂A $\underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ p har lika många nollställen i A som f, dvs 2 st.

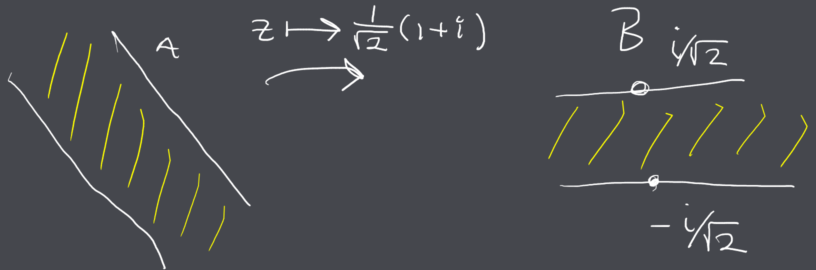
<u>Svar:</u> p har 2 nollst. i A.

<u>4:</u>

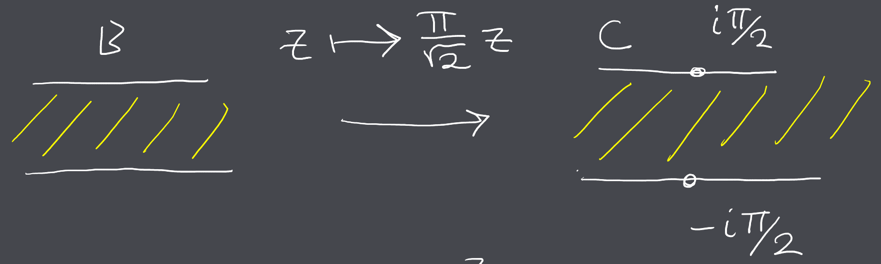


Det finns ett oändligt antal rätta svar, detta är bara en möjlighet. Vi gör detta i steg.

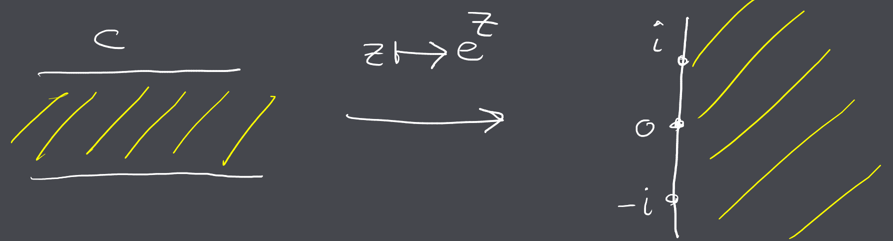
Först multiplicerar vi med $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ så att linjerna som begränsar området blir horisontella



Vi kommer vilja applicera e^z, men för att då få ett halvplan förstorar vi först området:



Nu applicerar vi e^z:



E = högra halvplanet

Till sist vill vi ha en Möbiusavbildning $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ som avbildar högra halvplanet på $D(0,1)$.

Vi väljer M s.a. $M(0) = -1$, $M(i) = i$, $M(\infty) = 1$, för då måste den imaginära axeln avbildas på enhetscirkeln, och orienteringen av punkterna ger tack vare konformitet att M måste avbilda högra halvplanet på $D(0,1)$ (se figur)

$0 \mapsto -1 \Rightarrow b = -d$, sätt $b=-1$, $d=1$.

$\infty \mapsto 1 \Rightarrow a = c$

$$i \mapsto i \Rightarrow \frac{ai-1}{ai+1} = i \Rightarrow ai - 1 = i(ai+1) = -a + i$$

$$\Rightarrow ai + a = 1 + i \Rightarrow a = 1, \text{ dvs } M(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Alla dessa avbildningar är bijektiva och konforma så det samma gäller för sammansättningen.

Sammansättningen blir $M \circ e^z \circ \frac{\pi}{\sqrt{2}} z \circ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z =$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}(1+i)z} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}(1+i)z} + 1},$$

och denna avbildar alltså A på $D(0,1)$ bijektivt o konformt.

7: Låt M vara Mavb. som avbildar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ och $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Eftersom de två axlarna skär varandra i de två punkterna 0 och ∞ finns två möjligheter

1. $M(0) = 0$, $M(\infty) = \infty$, el. 2. $M(0) = \infty$, $M(\infty) = 0$.

Vi tittar först på fall 1:

$M(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, $M(\infty) = \infty \Rightarrow c = 0$, sätt $d = 1$,

så får vi $M(z) = az$. $a = M(1) \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ enl. antagande,

så $M(z) = az$ där a är ett imaginärt nollskilt tal.

Å andra sidan, om $a \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierar az en Mavb som avbildar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tack vare att $0 \mapsto 0$, $\infty \mapsto \infty$, $1 \mapsto a$ och Mavb avbildar linjer o cirklar på linjer el. cirklar. P g a konformitet kommer då också $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avbildas på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Vi har därför bestämt alla Mavb i fall 1.

Vi tittar nu på fall 2.

$0 \mapsto \infty \Rightarrow d = 0$, $\infty \mapsto 0 \Rightarrow a = 0$, sätt $c = 1$,

vi får $M(z) = \frac{b}{z}$. $b = M(1) \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ enl. ant.

Å andra sidan, om $b \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ def. $\frac{b}{z}$ en Mavb som avbildar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

eftersom $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$, $1 \mapsto b$ medan

$i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avbildas på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eftersom $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$,

$i \mapsto \frac{b}{i} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och Mavb avbildar linjer o cirklar

på linjer el. cirklar.

Vi ser alltså att M är en Mavb som avbildar

$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ och $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ omm

$M(z) = az$, $a \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eller $M(z) = \frac{b}{z}$, $b \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$.