1.

Laplacetransformen av ekvationen ger

$$s^3\tilde{y} + s^2 + 4(s\tilde{y} + 1) = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s^3 + 4s)\tilde{y} = \frac{1}{s} - s^2 - 4 \Rightarrow \tilde{y} = \frac{1}{s^2(s^2+4)} - \frac{1}{s}$$

PBU ger: $\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right)$.

Från tabell har vi att $\frac{1}{s} = \widetilde{1}$, $\frac{1}{s^2} = \widetilde{t}$, $\frac{2}{s^2+4} = \widetilde{\sin 2t}$

så vi ser att

$\tilde{y} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t - 1\right)$ och enl. inversions-

formeln följer det att $y = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t - 1$.

Svar: $y(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t - 1$.

2. Enl. def. är $\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{1+7x^2}\,dx$.

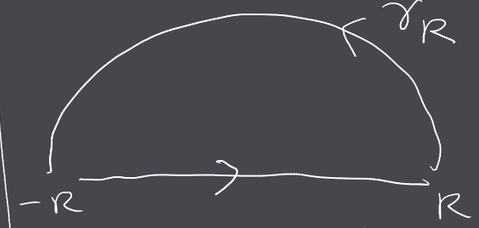
Vi låter $g(z) := \frac{e^{-itz}}{1+7z^2}$, har då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)\,dz.$$

Vi antar först att $t \le 0$.

Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0,\pi]$ samt

$\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$



Vi har nu:

$$\int_{\sigma_R} g\,dz = \int_{[-R,R]} g\,dz + \int_{\gamma_R} g\,dz$$

σ_R: använd residykalkyl

$[-R,R]$: $\to \hat{f}(t)$ då $R\to\infty$

γ_R: feltern, vill visa $\to 0$ då $R\to\infty$

Uppskattning av felterm:

$$\left|\int_{\gamma_R} g\,dz\right| \overset{\Delta\le\int}{\le} \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{e^{-itz}}{1+7z^2}\right|\pi R \le \left[\begin{array}{l} |e^{-itz}| = e^{ty} \le 1 \\ \text{ty } y\ge 0 \text{ på } \gamma_R \end{array}\right.,$$

$$|1+7z^2| \overset{\text{omv. }\Delta\ge}{\ge} 7|z|^2-1 = 7R^2-1 \text{ på } \gamma_R \Big] \le \frac{\pi R}{7R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

OK!

$\int_{\sigma_R} g\,dz$: $1+7z^2$ har enkla nollställen i $\pm\sqrt{7}i$ så g holo i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing.

i $\pm i/\sqrt{7}$ varav endast $i/\sqrt{7} \in \operatorname{int}\sigma_R$.

$$\operatorname{Res}_{i/\sqrt{7}} g \overset{\text{RRd}}{=} \left(\frac{e^{-itz}}{14z}\right)\Big|_{z=i/\sqrt{7}} = \frac{e^{t/\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}i}$$

$$\int_{\sigma_R} g\,dz \overset{\text{RS}}{=} \frac{2\pi i\, e^{t/\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}i} = \frac{\pi e^{t/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}, \quad R > 1/\sqrt{7}$$

Det följer från ovan att $\hat{f}(t) = \dfrac{\pi e^{t/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}$ då $t\le 0$.

Eftersom $f(t)$ reell så gäller för $t>0$ att

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)} \overset{-t\le 0}{=} \overline{\frac{\pi e^{-t/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}} = \frac{\pi e^{-t/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}},$$

så sammantaget får vi att $\hat{f}(t) = \dfrac{\pi e^{-|t|/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}$.

Svar: $\hat{f}(t) = \dfrac{\pi e^{-|t|/\sqrt{7}}}{\sqrt{7}}$.

3. Vi använder först argumentprincipen för att bestämma antalet nollställen i vänstra halvplanet.

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t\in[\pi/2, 3\pi/2]$,

och $\sigma_R := [-iR, iR] \cup \gamma_R$.

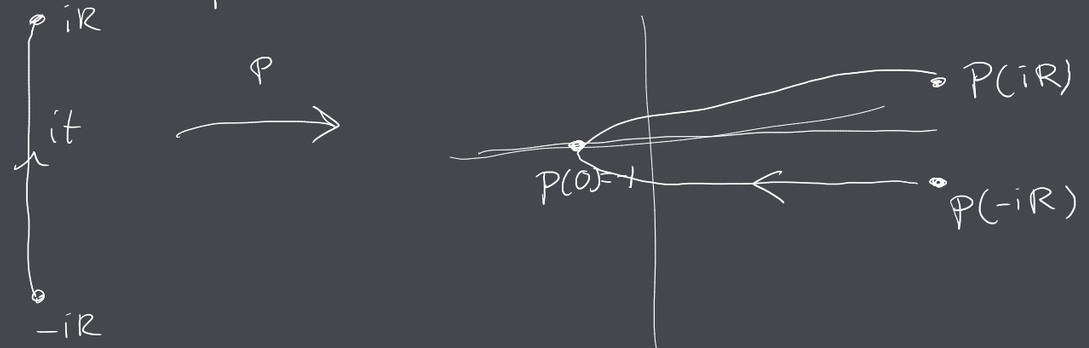
argvar$(p\circ\gamma_R)$: Vi ser att $p(Re^{it}) =$

$= R^4\left(2e^{4it} + \frac{4e^{it}}{R^3} - \frac{1}{R^4}\right)$ så $\arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$,

$R>>0$, vilket ger att argvar$(p\circ\gamma_R) \approx 4\pi$, $R>>0$.

argvar$(p\circ[-iR, iR])$:

Vi ser att $p(it) = 2t^4 + 4it - 1$



Vi noterar att $p(-iR)$ ligger i nedre halvplanet med argument nära 0 för $R>>0$, medan $p(iR)$ ligger i övre halvplanet med argument nära 0. Eftersom $\mathrm{Im}(p(it)) = 4t$ passerar kurvan den reella axeln endast i punkten $p(0)=-1$ vilket ger oss att argvar$(p\circ[-iR, iR]) \approx -2\pi$, $R>>0$.

Sammantaget får vi att

$W(p\circ\sigma_R) = \frac{1}{2\pi}(\text{argvar}(p\circ\gamma_R) + \text{argvar}(p\circ[-iR, iR])) \approx$

$\approx \frac{1}{2\pi}(4\pi - 2\pi) = 1$, så $W(p\circ\sigma_R) = 1$, $R>>1$.

Enligt argumentprincipen har då p **1** nollställe i vänstra halvplanet.

Nu använder vi Rouché för att hitta antalet nollställen i $D(-3,1)$.

Vi skriver $p = f + g$ där $f := 2z^4$ och $g := 4z - 1$.

På randen till $D(-3,1)$ har vi att $2 \le |z| \le 4$.

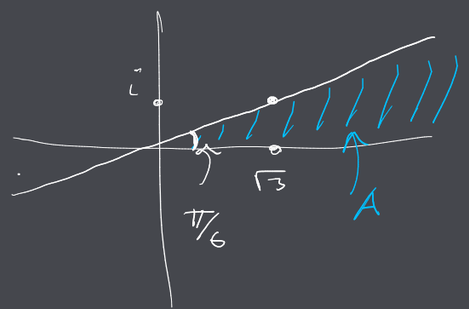
Vi får att $|f| \ge 32$ på $C(-3,1)$ medan

$|g| \overset{\Delta\le}{\le} 4|z| + 1 \le 4\cdot 4 + 1 = 17 < 32$ på $C(-3,1)$.

Rouchés sats säger nu att p har lika många

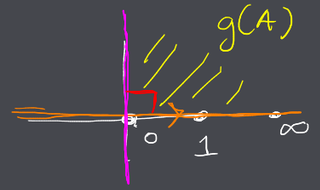
som f i $D(-3,1)$, dvs noll stycken. Vi ser också från uppskattningarna att p inte kan ha några nollställen på $C(-3,1)$, så sammanfattningsvis får vi att p har $1-0=1$ nollställe i området $\{z : \mathrm{Re}(z)<0,\ |z+3|>1\}$.

4. Vi noterar att om $g(z):=z^3$ och $M(z):=\frac{1+z}{1-z}$ så är $f = M\circ g$, så $f(A) = M(g(A))$.

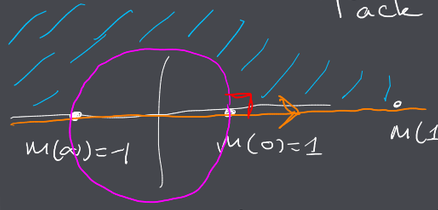


Genom att jämföra med en liksidig triangel eller använda standardvärdet $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi/6$ ser vi att $A := \{z\neq 0 : 0<\mathrm{Arg}(z)<\pi/6\}$,

så $g(A) = \{z\neq 0 : 0<\mathrm{Arg}(z)<\pi/2\}$ = första kvadranten



$g(A)$ begränsas av linjerna $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ o $i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Vi noterar att $M(0)=1$, $M(1)=\infty$, $M(\infty)=-1$. Eftersom M är en Möbiusavb. och sådana avbildar cirklar/linj. på cirk. el. linj. så får vi att $M(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.



Tack vare att Mavb är konforma ser vi också att $M(i\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ är en cirkel som går genom 1 o -1 och som dessutom skär x-axeln i rät vinkel.

Detta ger oss att $M(i\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = C(0,1)$.

När vi går från 0 till 1 ligger $g(A)$ till vänster, så tack vare konformiteten kommer $M(g(A))$ ligga till vänster när vi går från $M(0)=1$ till $M(1)=\infty$, dvs $M(g(A)) = \{z : \mathrm{Im}(z)>0,\ |z|>1\}$ (se figur).

<u>Svar:</u> $f(A) = \{z : \mathrm{Im}(z)>0,\ |z|>1\}$.

7. Enl. klassifikation av nollställen så finns det en hel funktion g s.a.a. $f(z) = z^2 g(z)$. Vi noterar att $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^2} \leq \frac{4}{1} = 4$ på $C(0,1)$. Enl. maximummodulusprincipen följer det att $|g(z)| \leq 4$ på $D(0,1)$, så speciellt får vi att $|g(1/2)| \leq 4$.

Vi ser nu att $|f(1/2)| = |(1/2)^2 g(1/2)| = \frac{|g(1/2)|}{4} \leq 1$,

vilket skulle visas.