

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
14 januari 2022, kl. 14.00-18.00

Examinator: Michael Björklund, 072-8586787

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 7 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Bestäm lösningen y till randvärdesproblemet:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

LEDTRÅD: Ansätt $y(x) = u(x)e^{rx}$ för någon lämplig konstant r . (6p)

2. Låt y beteckna lösningen till initialvärdesproblemet:

$$(1 + x^2)y'(x) = 1 + y(x)^2, \quad y(0) = 1.$$

Beräkna vänstergränsvärdet $I_2 := \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)y(x)$.

HJÄLP: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ för alla α och β för vilka nämnaren i högerledet är nollskild. (7p)

3. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n e^{-k^2/n} = \sqrt{\pi}.$$

LEDTRÅD: För varje n , jämför summan ovanifrån och underifrån med integralen av funktionen $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ från 0 till n . Använd instängningsprincipen. Du får också använda att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

utan bevis. (8p)

4. Beräkna gränsvärdet:

$$I_4 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2 \ln(1+x)) - 2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \sin(x^4)}{(1 - \cos x)^2} \quad (8p)$$

5. Beräkna $I_5 := \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 3n)2^{-n}$.

LEDTRÅD: Bilda $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 3n)x^n$, så att $I_5 = g(1/2)$, och uttryck funktionen g i termer av f, f' och f'' , där

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{för alla } |x| < 1. \quad (7p)$$

6. Beräkna gränsvärdet

$$I_6 := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

LEDTRÅD: Fixera $\epsilon > 0$, och skriv

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \underbrace{\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1+x^n}}_{=:A_n(\epsilon)} + \underbrace{\int_{1-\epsilon}^1 \frac{dx}{1+x^n}}_{=:B_n(\epsilon)} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}}_{=:C_n}.$$

Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\epsilon) = 1 - \epsilon, \quad B_n(\epsilon) \leq \epsilon, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0. \quad (8p)$$

7. Visa att gränsvärdet

$$I_7 := \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$

existerar och beräkna dess värde.

LEDTRÅD: Du får använda att

$$\frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t, \quad \text{för alla } t > -1,$$

utan bevis. (6p)