

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
12 april 2022, kl. 8.30-12.30

Examinator: Michael Björklund, 072-8586787

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 7 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Låt y beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$y''(x) + 2y(x) + y(x) = xe^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Beräkna gränsvärdet

$$I_1 := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)e^x}{x^3}.$$

LEDTRÅD: VILKEN DIFFERENTIALEKVATION UPPFYLLER $z(x) = y(x)e^x$? (7p)

2. Beräkna gränsvärdet

$$I_2(\alpha) := \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\alpha k) x^k$$

för alla $0 < \alpha < 2\pi$.

LEDTRÅD: $\cos(y) = \operatorname{Re}(e^{iy})$ OCH ANVÄND GEOMETRISK SUMMATION. (5p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$I_3 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{q=k}^{k^2} \frac{1}{q} \right).$$

(10p)

4. Låt φ vara en 3 gånger kontinuerligt deriverbar reellvärd funktion på $(-1, 1)$.
Vad måste $\varphi(0)$ och $\varphi'(0)$ vara för att gränsvärdet

$$I_4 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varphi(x)} - (\cos(x) + \sin(x))}{\sqrt{1+x^2} - 1}$$

skall existera? Beräkna även I_4 för dessa värden, uttryckt i termer av $\varphi''(0)$. (8p)

5. Beräkna gränsvärdet

$$I_5 := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}.$$

LEDTRÅD: KAN SUMMAN GÖRAS TELESKOPERANDE? (5p)

6. Beräkna gränsvärdet

$$I_6 := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{1+x^n} dx. \quad (8p)$$

7. Definiera funktionen $f(x) = e^{-\frac{\sin x + x^2}{1+\cos x}}$ för $x \in (-\pi, \pi)$. Visa att gränsvärdet

$$I_7(f) := \lim_{\substack{(x,h) \rightarrow (0,0) \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, och beräkna dess värde. (7p)