

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
18 augusti 2022, kl. 08.30-12.30

Examinator: Michael Björklund (072-8586787)

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. SKRIV TYDLIGT OCH REDOVISA VILKA RESULTAT FRÅN KURSEN SOM DU ANVÄNDER.

Totalt 50 poäng, fördelade på 6 uppgifter (2 sidor)

Betygsgränser: 3 (20-34 poäng), 4 (35-43 poäng), 5 (44-50 poäng).

1. Finn en funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$y''(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

LEDTRÅD: Ansätt $y(x) = xu(x)$. Vilka differentialekvationer måste funktionen u uppfylla?

(5p)

2. För varje $y_0 \in [0, \pi/2)$, finn en funktion $y : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att

$$y'(x) \sin(y(x)) = \cos(y(x)) \cdot x \cos(x^2), \quad y(0) = y_0.$$

LEDTRÅD: Behandla fallet $y_0 = 0$ separat.

(9p)

3. För vilka $p, q, r \geq 0$ konvergerar serien

$$S(p, q, r) := \sum_{n=7000}^{\infty} \frac{1}{n^p \cdot (\ln n)^q \cdot (\ln \ln n)^r} \quad ?$$

(7p)

4. Bestäm reella tal a och b sådana att gränsvärdet:

$$I := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \ln(1 + x^4) - a \cdot x^3 \cdot \sin(x) - b \cdot x^2 \cdot \cos(x^2)}{x^2 \cdot \tan^2(x) \cdot (e^{x^2} - 1) \cdot (\cos x - 1)}$$

existerar.

(8p)

5. För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{2^k} \quad ?$$

Ange även om konvergensen är absolut eller betingad. (3p)

6. För $k \geq 1$, definiera

$$a_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_k(\theta) = \sin(k\theta),$$

och låt $s_n(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k(\theta)$ och $t_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k(\theta)}{k^2}$.

a) Visa att funktionen $t(\theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\theta)$ existerar för alla θ , och är kontinuerlig på $\mathbb{R}$. (2p)

b) Visa att sekvensen $(a_k(\theta))$ inte konvergerar mot noll för varje $\theta \in (0, \pi)$, och avgör huruvida gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\theta)$ existerar. (4p)

LEDTRÅD: Antag att $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin(k\theta) = 0$ för något $\theta \in (0, \pi)$. Skriv $k\theta = n_k\pi + \delta_k$ för ett (unikt bestämt) heltal n_k och (unikt bestämt) $\delta_k \in [-1/2, 1/2)$. Vad gäller för differensen mellan $n_{k+1}\pi + \delta_{k+1}$ och $n_k\pi + \delta_k$? Härled en motsägelse.

c) Visa att $(s_n(\theta))$ är en begränsad sekvens för alla θ . (5p)

LEDTRÅD: Skriv om sin på komplex form och använd geometrisk summation.

d) Visa att funktionen $g(\theta) := \sup\{|s_n(\theta)| : n \geq 1\}$ inte är kontinuerlig i punkten $\theta = 0$. (7p)

LEDTRÅD: Vad är $g(0)$, och hur beter sig $g(1/n)$ då $n \rightarrow \infty$?