

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2020-01-17, 14.00–18.00

Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5352

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\frac{\begin{array}{l} \neg((\neg s) \vee q) \\ (s \wedge \neg q) \rightarrow p \\ (\neg t) \vee r \\ (\neg t) \rightarrow (\neg p) \end{array}}{r}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (6p)

2. Låt n och k vara positiva heltal.

(a) Visa med ett kombinatoriskt argument att

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(3p)

(b) Visa att

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

(3p)

3. (a) Betrakta påståendena “Alla hundar är svarta” och “Somliga svarta djur är inte hundar”. Skriv dem på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (3p)

(b) Låt nu universum vara mängden $\mathbb{Z}_+$ av alla positiva heltal. Låt $P(x)$ vara predikatet “ x är ett primtal” och $Q(x, y)$ vara predikatet “ $x \leq y$ ”. Skriv ut utsagan

$$\forall x \exists y : Q(x, y) \wedge P(y)$$

med “vanliga ord” och avgör om den är sann eller falsk (motivering krävs). (3p)

Var god vänd!

4. (a) Rita en graf G_1 med fyra noder och gradtal 1, 2, 2, 3, och rita ut en Eulerväg i G_1 . (2p)

(b) Låt G_2 vara den riktade grafen med nodmängd $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ och grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rita G_2 . (2p)

(c) Låt G_3 vara den (vanliga) graf man får om man glömmer riktningarna på kanterna i G_2 . Har G_3 en Eulercykel (motivering krävs)? (2p)

5. Låt $n \in \mathbb{Z}_+$ och låt A vara en mängd med n element.

(a) Antag att $f : A \rightarrow A$ är en surjektiv funktion. Visa att f är bijektiv. (2p)

(b) Bestäm hur många bijektiva funktioner det finns från A till A . (2p)

(c) Bestäm hur många ekvivalensrelationer det finns på A som har exakt två ekvivalensklasser. (2p)

6. Bestäm alla lösningar och den minsta positiva lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 4 & (10) \\ x \equiv 2 & (7) \\ x \equiv 5 & (11). \end{cases} \quad (6p)$$

7. Definera en talföljd $a_1, a_2, a_3, \dots$ genom att sätta $a_1 = 41$ och $a_{n+1} = a_n + 2n$ för $n \geq 1$. Hitta en explicit formel för a_n som en funktion av n och bevisa formeln med induktion. Använd formeln för att hitta ett $k \in \mathbb{Z}_+$ så att a_k inte är ett primtal. (7p)

8. I den här uppgiften skall alla svar skrivas som explicita tal (i bas 10).

(a) En klass bestående av 9 elever skall delas in i tre grupper med tre elever i varje grupp. Bestäm antalet sätt det kan göras på. (3p)

(b) En annan klass består av 12 elever, hälften flickor och hälften pojkar. Bestäm antalet sätt man kan dela in klassen i tre grupper med två flickor och två pojkar i varje grupp. (4p)

Lycka till!
Christian