

1 dag: Avsluta kap 3.

Summor och produkter Σ , Π

• Vilka har sett?

Ibland är det bättre att skriva en följd

• $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

med hjälp av ett index, sås i :

• $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$

Ex $1, 4, 9, 16, \dots, 100$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow a_i = i^2, i = 1, 2, 3, 4, \dots, 10.$

Samma sak med summor:

$a_1 + \dots + a_n$ kan skrivas

Φ

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

↑ summations-index
 ↑ startvärde
 ↑ slutvärdet

(n summande från $i=1$
 till n av a_i)

Fördelar: Mer kompakt & värdefullare
 (behöver inte "gissa mönstret")

Nackdel: Mindre intuitivt.

OBS!

- Startvärdet måste inte vara 1
- Indexet måste inte heta i

$$\text{Ex} \quad \sum_{j=2}^4 j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$$

Produkter skrivs på samma sätt med $\prod$ istället för $\sum$.

$$\prod_{i=3}^5 (i-1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

indexeringen
~~summan~~

Variation: Ibland uttrycker man ~~en~~ i termer
av mängder:

Ex

$$\sum_{i=2}^4 i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2$$

om $M = \{i \mid i=2,3,4\} = \{2,3,4\}$

Så kan man skriva $\sum_{i \in M} i^2$

Ex

$$M = \{2,4,6\}$$

$$\sum_{x \in M} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2 + 3 + 4 = 9..$$

OBS! Spelar ingen roll i vilken ordning man adderar.

Fördel: Lite mer flexibelt. Nackdel: Lite mer abstrakt?

Relationer

(cf. logiska & mängdrelationer)

~~Generalisering av funktioner~~ — fast lite annan
intuition.

Def: A, B mängder. En relation från A till B
är en delmängd $R \subseteq A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

~~Ax~~

Tänker: Låt $x \in A, y \in B$:

$(x, y) \in R$ tolkas som "x är relaterat till y"

$(x, y) \notin R \rightarrow$ "x är inte relaterat till y".

Skriver ofta $x R y$ istället för $(x, y) \in R$.

Oftast $A = B$

Ex 1) $A = B = \mathbb{Z}$. Definiera $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

genom $(x, y) \in R \iff x \leq y$.

2) $A = B = \{\text{utsatser}\}$, definiera $R \subseteq A \times A$

genom $(P, Q) \in R \iff P \rightarrow Q$ är sann;
dvs $P \Rightarrow Q$.

~~Detta är~~

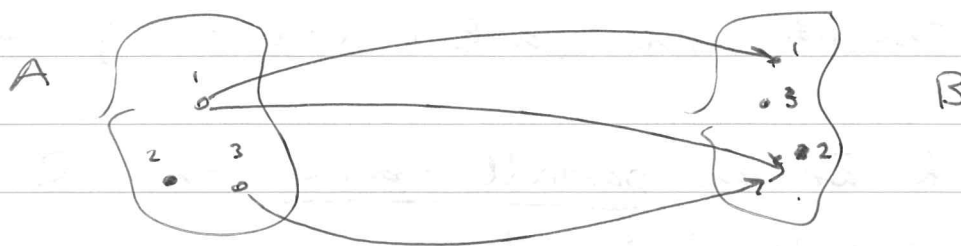
3) $A = \{\text{städer i Europa}\}$, $B = \{\text{länder i Europa}\}$.

$R \subseteq A \times B$: $(a, b) \in R \iff a$ ligger i b .

$(\text{New York, USA}) \in R$.

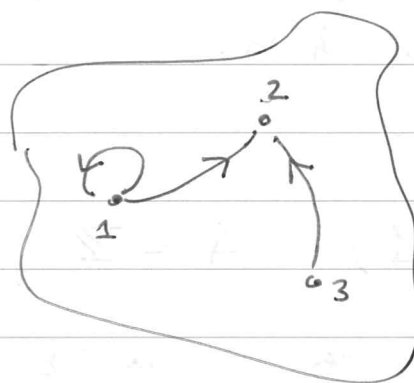
$(\text{Gbg, Norge}) \notin R$.

Visualisering: Som en funksjoner, fast tilhør...



OK med én pil, OK med flere piler.

Om $A = B$:



$$A = \{1, 2, 3\} :$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\} \subseteq A \times A.$$

Egenskaper hos relasjoner $A = B$ from nu.

R relasjon på A . R er:

1) reflexiv om $a R a$ ~~for~~ $\forall a \in A$.

2) symmetrisk om $a R b \Rightarrow b R a \forall a, b \in A$

3) antisymmetrisk om $(a R b \wedge b R a) \Rightarrow a = b$
 $\forall a, b \in A$.

4) transitiv om $(a R b \wedge b R c) \rightarrow a R c$.

5) R är en partiell ordning om R ~~är~~
uppfyller 1, 3 & 4.

6) R är en ekvivalensrelation om R uppfyller
1, 2 & 4.

Ex: 1) $A = \mathbb{Z}$, $R = \leq$ är ^{en} partiell ordning.

$a \leq a \quad \forall a$, $a \leq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$, $a \leq b \wedge b \leq c$
 $\Rightarrow a \leq c$.

2) $A = \{\text{städer}\}$, $x R y \Leftrightarrow x$ och y ligger i
samma land

är en ekvivalensrelation.

Övning: $A = \{\text{utsagor}\}$ $R = \Rightarrow$

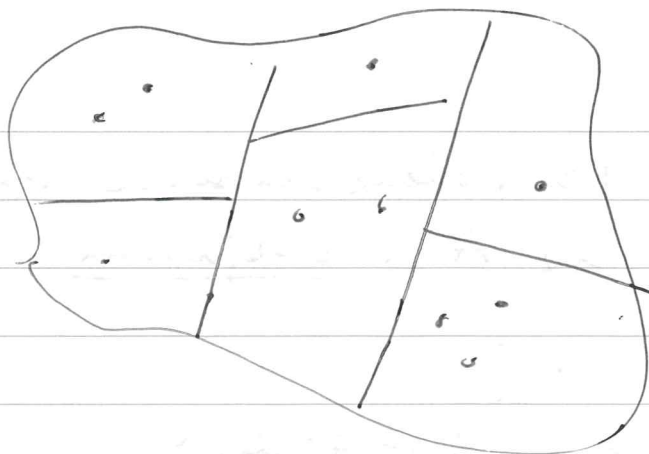
Transitiv? Partiell ordning?

Leta mer om ekvivalensrelationer.

Tillbaka till $A = \text{städer}$, $R = \dots$

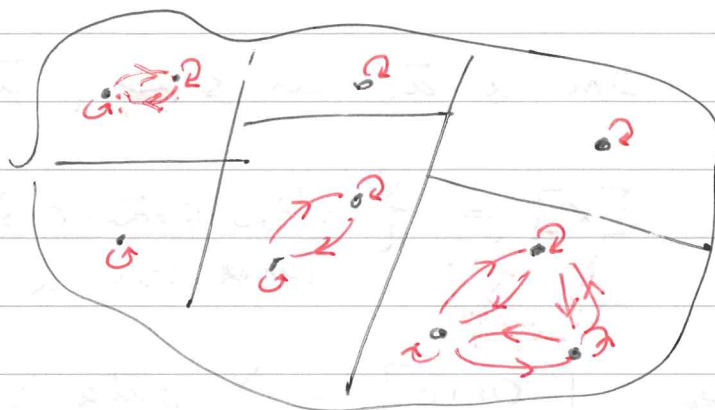
Visualisering

Karta



Som nätverk

graf:



Typisk bild ▽

"Länderna" kallas för ekvivalensklasser

Def: R ekv. på A . Om $x \in A$ sätter vi

$$[x] = \{ y \in A \mid x R y \}$$

kallas för a 's ekvivalensklass.

$i A$
"allt som
är
relaterat
till x "

Sats 1) $x \in [x]$

2) $x R y \Leftrightarrow [x] = [y]$

3) x inte relaterat till $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

Ekvivalens klasserna ger en uppdelning av A i disjunkta delmängder.

Ex $A = \{\text{städer}\}$, $x R y = "$ x ligger i samma land som y $"$.

Om x är en stad, är

$$[x] = \{ \text{alla städer som ligger i samma land som } x \}$$

ex $[Oslo] = \{ \text{alla städer i Norge} \}$.

Ett annat sätt att tänka kring ekvivalens-
-relationer

Notation: I indexmängd; för varje

$i \in I$ har vi en mängd A_i såg.

Vi definierar

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists i \in I : x \in A_i \}$$

"Unionen av alla A_i , för $i \in I$ ".

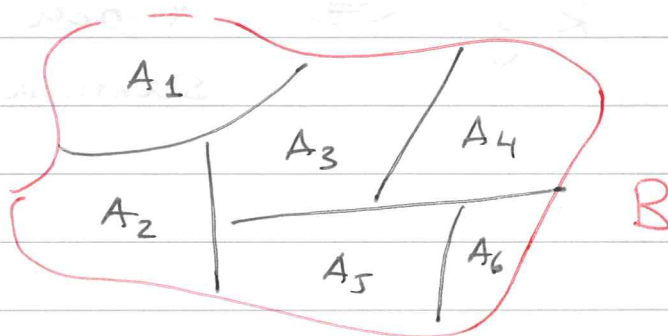
Def En partition av en mängd B är en samling delmängder $A_i \subseteq B$ indexerade av en mängd I , så att

$$1) \quad B = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$2) \quad \text{Om } i \neq j \text{ så är } A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Mängderna A_i , $i \in I$, kallas för celler.

Visualisering:



Ex $B = \{\text{städer}\}$, $I = \{\text{länder}\}$,
 $A_i = \{\text{alla städer i land } i\}$, $i \in I$,
är en partition av B .

Partitioner och ekvivalensrelationer är
ekvivalenta koncept:

- Om R är en ekvivalensrelation på B ,
så är ekvivalensklasser för R cellerna i en
partition av B .

- Om $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ är en partition,
kan vi definiera en ekvivalensrelation
 R på B genom

$$x R y \iff x \text{ och } y \text{ ligger i} \\ \text{samma cell.}$$