# TMV200 16/11 - 21

## Kombinatorisk problemlösning:

**På hur många sätt kan jag fördela lika bollar i fyra lådor?**


Om bollarna varit olika: Använd multiplikations-
-principen.

Visuellt trick: En uppdelning är en sekvens

$$\underbrace{\bullet\ \bullet}_{\text{Låda 1}}\ |\ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{\text{Låda 2}}\ \underbrace{|\ |}_{\text{låda 3}}\ \underbrace{\bullet\ \bullet}_{\text{låda 4.}}$$

Har 7 bollar + 3 "väggar"/"avgränsare".

Var väggarna sitter avgör hur upp-
-delningen ser ut.

Totalt 10 symboler (7 bollar + 3 väggar)
varav 3 skall vara väggar.

kan göras $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ sätt.

Slutsats: Man kan fördela $n$ lika objekt i $k$ olika högar på $\binom{n+k-1}{k-1}$ olika sätt.

Ex Tre barn skall få ~~7~~ 8 äpplen. På hur många sätt kan äpplena fördelas?

1) utan restriktioner?

Samma som ovan, $\binom{10}{2} = 45$ sätt

2) om alla skall få minst ett äpple?

Först ger vi alla var sitt äpple, sen fördelar vi resterande 5 äpplena

- kan göras på $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ sätt.

3) Om äldsta barnet skall få max 4 äpplen?

<u>Tänker tvärtom först:</u>

På hur många sätt kan vi dela ut äpplena så att äldsta får minst 5?

Först 5 till äldsta, sen delar vi ut resterande 3: kan göra på $\binom{5}{2} = 10$ sätt.

Så antalet sätt så att äldsta barnet får max 4 äpplen är

$$\underbrace{45}_{\text{alla sätt}} - \underbrace{10}_{\text{minst 5 till äldsta}} = 35 \text{ sätt}$$

4) Om de två yngsta barnen skall få lika många?

De två yngsta kan få 0, 1, 2, 3 eller 4 var, och äldsta får resten. Så det kan göras på 5 sätt.

## Räkna saker på två sätt:

$n, k \in \mathbb{Z}_+$ , $n \geq k$.

**Sats** (6.13 i boken) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

**Bevis:** $\binom{n+1}{k}$ är antalet sätt vi kan välja $k$ tal ur $\{1, 2, ..., n+1\}$.

Vi kan också beräkna det på ett annat sätt:

- Antingen tar vi med $n+1$ bland våra $k$ tal, eller inte.

**Om inte:** Alla $k$ talen skall väljas från $\{1, 2, ..., n\}$, kan göras på $\binom{n}{k}$ sätt.

**Om $n+1$ är med:** Då skall vi välja ytterligare $k-1$ tal från $\{1, 2, ..., n\}$, kan göras på $\binom{n}{k-1}$ sätt.

Så totalt kan det göras på $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ sätt.

Alltså är $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Kan visualisera binomialkoefficienterna:

Pascals triangel:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & \text{rad} \\
 & & & & & 1 & & & & & & 0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & \vdots
\end{array}
$$

Tal nummer $k$ på rad $n$ är $\binom{n}{k}$.

Binomialsatsen: (6.14 i boken)

$n \in \mathbb{N}$ : $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bevis i boken.

# Lådprincipen (pigeonhole principle)

Om $n+1$ objekt placeras i $n$ lådor, måste det finnas en låda med minst två objekt

Ex 25 elever går i en skolklass. Visa att minst tre st är födda i samma månad.

Finns 12 månader — mina "lådor"
25 elever — mina "objekt"

$25 = 2 \cdot 12 + 1$, så måste finnas en "låda" med tre "objekt", dvs 3 elever födda i samma månader.

Ex 40 personer går på en fest. Visa att minst två personer har skakat hand med lika många personer.

Varje person skakar hand med

0, 1, 2, 3, ..., 38 eller 39 personer

Objekt: de 40 personerna

Lådor: Antalet möjliga handskakningar

$$\underbrace{0, 1, 2, ..., 39}_{40 \text{ st.}}$$

Funkar inte .... men!

Om någon har skakat hand med 39 personer, så har ingen skakat hand med 0 personer.

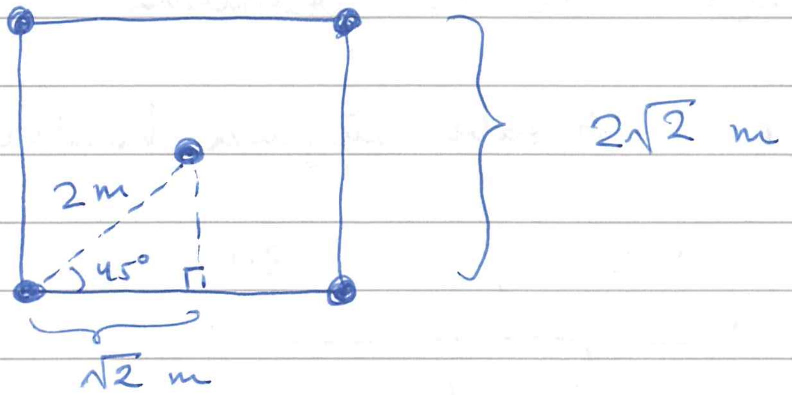
Så antingen är 0 "tom" eller så är 39 "tom".

Så det kommer vara högst 39 "icke-tomma" lådor, så vi kan tillämpa lådprincipen.

⇒ finns minst två personer som skakat hand med lika många.

Ex Fem personer skall stå ett kvadratiskt

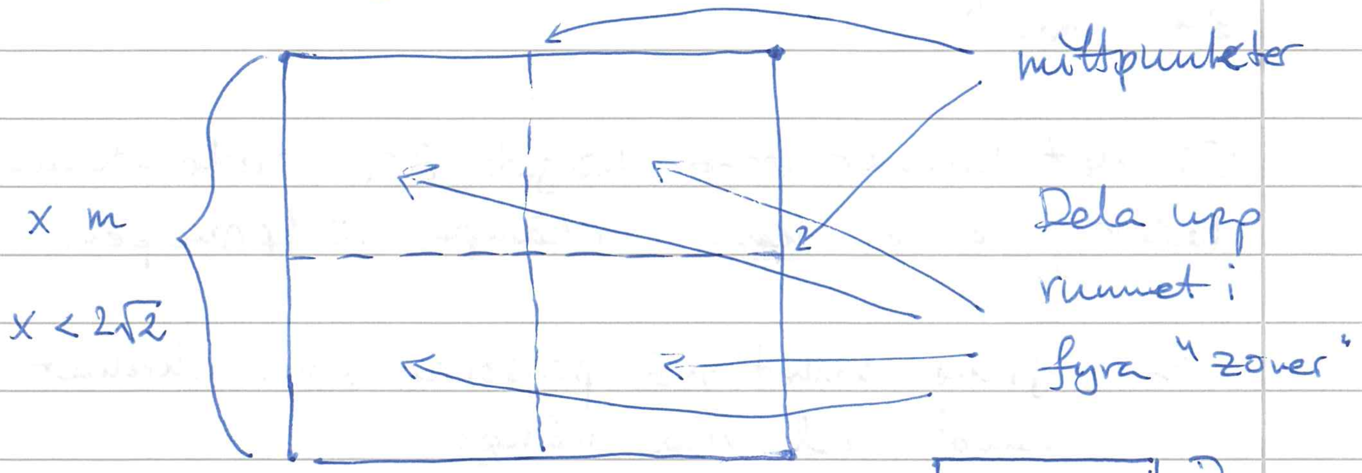
rum med minst två meters avstånd.
Hur litet kan rummet vara?

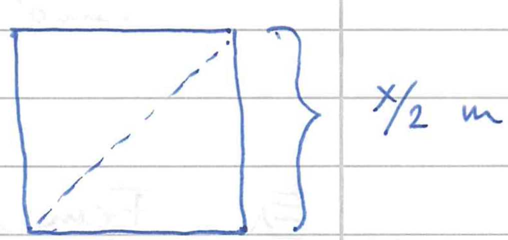



Pythagoras sats.

Så ett kvadratiskt rum på $(2\sqrt{2})^2 = 8\ m^2$
funkar.

Kan man göra ett mindre rum?




Diagonalen är < 2 m,
så det är mindre än 2 m mellan vilka två

punkter som helst i en zon.

Men nu har jag fem personer som skall placeras ut i fyra "zoner", så det måste finnas en zon med två personer i, och de kommer att stå på ett avstånd mindre än 2 m.

Så 8 $m^2$ är det minsta rummet som är möjligt.