

Övningsdugga

1. Låt A och B vara ändliga mängder. Betrakta påståendet "Somliga funktioner från A till B är surjektiva men inte injektiva". Skriv det på predikatlogisk form, och avgör under vilka antaganden på A och B som det är sant. (4p)

2. Låt $x \neq 0$ vara ett reellt tal och anta att $x + \frac{1}{x}$ är ett heltal. Visa att

$$x^n + \frac{1}{x^n}$$

är ett heltal för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (4p)

3. Alice, Bob och Eve väljer tal från mängden $S = \{1, 2, \dots, 10\}$. Alice väljer först vilket tal som helst utom 10. Bob väljer sedan ett tal som är större än det Alice valt, men får inte välja 2 om Alice valt 1. Eve väljer slutligen ett tal som är mindre än det Bob valde, men inte samma som Alice valt. På hur många sätt kan detta göras? (4p)

LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ NÄSTA SIDA!

1. Låt universum U vara mängden av funktioner från A till B . Låt $I(f)$ vara predikatet “ f är injektiv” och låt $S(f)$ vara predikatet “ f är surjektiv. Då kan påståendet skrivas som

$$\exists f \in U : S(f) \wedge \neg I(f).$$

Det finns en surjektiv funktion från A till B om och endast om $|A| \geq |B|$. Om $|A| = |B|$ så är en surjektiv funktion också injektiv, men om $|A| > |B|$ så finns det inga injektiva funktioner från A till B . Alltså är påståendet sant om och endast om $|A| > |B|$.

2. Vi visar påståendet med (stark) induktion. Basfallet $n = 1$ är sant, eftersom vi antagit att $x + \frac{1}{x}$ är ett heltal. Antag nu att $x^k + \frac{1}{x^k}$ är ett heltal för alla $k \leq n$. Vi skall visa att $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ är ett heltal. Betrakta identiteten

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Om vi flyttar över $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ från högerledet till vänsterledet så får vi

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Enligt vårt induktionsantagande är $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x + \frac{1}{x}$ och $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ alla heltal, så $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ måste vara ett heltal, vilket avslutar induktionssteget. Enligt induktionsprincipen är formeln bevisad för alla positiva heltal n .

3. Utfallet av att Alice, Bob och Eve valt tal är tre olika tal a , b och c från S — det finns $\binom{10}{3}$ sådana triplar av tal. För en given trippel a, b, c så måste Bob ha valt det största talet, medan vi inte vet om Alice eller Eve har valt det minsta. Således kan varje trippel uppstå på två olika sätt — antingen har Eve valt det minsta talet eller så har Alice gjort det. Vi ser då att valen kan göras på

$$\binom{10}{3} \cdot 2 = 240$$

olika sätt.