

TMV200 Diskret Matematik - Dugga 1

2021-11-26, 08.00–08.45.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Observera: Poäng ges huvudsakligen för korrekta beräkningar, argument och motiveringar. Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{Z}$ genom $a \sim b$ om (och endast om) differensen $a - b$ är ett udda tal. Avgör om $\sim$ är

- reflexiv?
- symmetrisk?
- antisymmetrisk?
- transitiv?

Motivera dina svar med argument och/eller motexempel. (4p)

2. Visa att

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

för alla heltal $n \geq 2$. (4p)

3. Låt A och B vara mängder med $|A| = n$ och $|B| = 2$.

a) Hur många injektiva funktioner från B till A finns det?

b) Hur många surjektiva funktioner från A till B finns det? (4p)

Obs! Inte samma riktning på funktionerna i a) och b).

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. Vi behandlar delfrågorna var och en för sig:

- $\sim$ är inte reflexiv. För alla $a \in \mathbb{Z}$ gäller att $a - a = 0$ är ett jämnt tal, så $a \not\sim a$.
- $\sim$ är symmetrisk. Om $a \sim b$, dvs $a - b$ är udda, så är $b - a = -(a - b)$ också udda, så $b \sim a$.
- $\sim$ är inte antisymmetrisk. Exempelvis är $2 \sim 1$ och $1 \sim 2$, men $1 \neq 2$.
- $\sim$ är inte transitiv. Exempelvis är $2 \sim 1$ och $1 \sim 0$, men $2 \not\sim 0$.

2. Vi gör ett induktionsbevis. Sätt $f(n) = \frac{n+1}{2^n}$, vi vill visa att

$$f(n) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

för alla heltal $n \geq 2$.

Basfall: Vårt basfall är $n = 2$. Vi har $f(2) = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}$, och

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4},$$

så basfallet är ok.

Induktionssteg: Antag att formeln håller för något $n \geq 2$, vi vill visa att den också håller för $n + 1$. Vi har

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = f(n) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = f(n+1), \end{aligned}$$

där vi använt induktionsantagandet för att få den andra likheten. Så induktionssteget är ok, och enligt induktionsprincipen är formeln bevisad för alla heltal $n \geq 2$.

3. A har n element och B har två element, som vi kallar x och y . Så $B = \{x, y\}$.

(a) Låt $f : B \rightarrow A$ vara en injektiv funktion. Eftersom $B = \{x, y\}$ så bestäms f av $f(x)$ och $f(y)$. Eftersom f är injektiv så måste $f(x) \neq f(y)$. Vi har då n val för $f(x)$ (eftersom A har n element) och sedan $n - 1$ val för $f(y)$. Det ger oss $n(n - 1)$ injektiva funktioner från B till A .

(b) Totalt finns det 2^n funktioner från A till B : För varje $z \in B$ skall vi välja om $g(z) = x$ eller $g(z) = y$, så vi har n oberoende val som vardera kan göras på 2 sätt, så multiplikationsprincipen ger oss 2^n val totalt.

Om $g : A \rightarrow B$ inte är surjektiv så måste antingen $g(z) = x$ för alla $z \in B$ eller $g(z) = y$ för alla $z \in B$, så två funktioner är inte surjektiva. Alltså finns det $2^n - 2$ surjektiva funktioner från A till B .