

TMV200 Diskret Matematik - Dugga 2

2021-12-10, 08.00–08.45.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Observera: Poäng ges huvudsakligen för korrekta beräkningar, argument och motiveringar. Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Rita två grafer som bägge har fem noder och som innehåller en Eulercykel, men som inte är isomorfa (motivera varför de inte är isomorfa, samt varför de har Eulercykler). (4p)

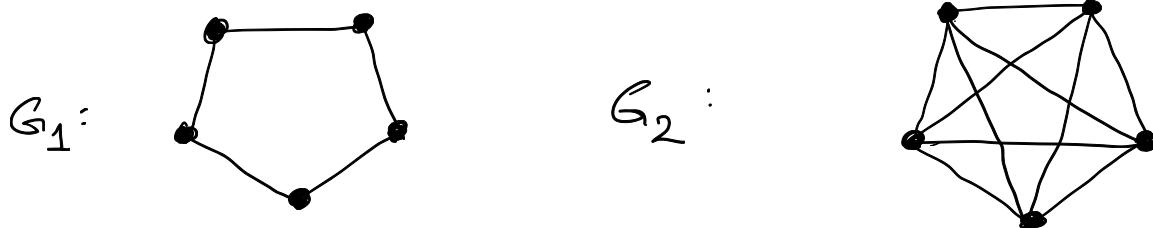
2. Hitta alla heltalslösningar till ekvationen $9x + 14y = 3$. (4p)

3. Visa att ekvationen $2x^2 = y^2$ saknar lösningar där x och y är heltal (Tips: Hur många gånger delar 2 vänsterledet respektive högerledet?). (4p)

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. Låt G_1 vara 5-cykeln och låt G_2 vara den fullständiga grafen med 5 noder. Samtliga gradtal i G_1 är 2 och samtliga gradtal i G_2 är 4, så dessa två kan inte vara isomorfa, och de har bägge (minst) en Eulercykel enligt sats från föreläsningarna/boken.



2. Euklides algoritmen ger

$$14 = 9 \cdot 1 + 5, \quad 9 = 5 \cdot 1 + 4, \quad 5 = 4 \cdot 1 + 1,$$

så $\text{sgd}(14, 9) = 1$, vilket delar 3, så ekvationen har heltalslösningar. Om vi går baklänges får vi

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \cdot 5 - 9 = 2 \cdot (14 - 9) - 9 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9,$$

så $u = -3$, $v = 2$, löser ekvationen $9u + 14v = 1$. Multiplicerar vi u och v med 3 får vi en lösning $x_0 = -9$, $y_0 = 6$ till vår ekvation $9x + 14y = 3$. Alla lösningar ges nu av formeln

$$(x_n, y_n) = (-9 + 14n, 6 - 9n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Problemet är felformulerat, jag skulle ha skrivit att x och y skall vara heltal som inte är 0. Annars är $x = y = 0$ en heltalslösning till ekvationen.

För att visa att den inte har några andra heltalslösningar kan man resonera såhär: Eftersom vi har unik primtalsfaktorisering kan vi skriva $x = 2^a m$ och $y = 2^b n$ för unika heltal a, b, m, n med $a, b \geq 0$ och m och n är udda. Ekvationen $2x^2 = y^2$ ger då att

$$2^{2a+1} m^2 = 2^{2b} n^2,$$

där m^2 och n^2 är udda. Vi ser att 2 delar vänsterledet ett udda antal gånger och högerledet ett jämt antal gånger, så vänsterledet och högerledet kan inte vara lika enligt satsen om unik primtalsfaktorisering.