

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
TMV200 – Diskret matematik

Tentamen: 2022-01-14, 14.00–18.00

Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5352

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt

Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.

Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} c \rightarrow ((\neg b) \wedge d) \\ (a \vee e) \rightarrow (b \vee (\neg d)) \\ (\neg a) \rightarrow e \\ c \vee d \\ \hline d \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (6p)

2. De harmoniska talen H_n definieras rekursivt som

$$\begin{cases} H_1 = 1; \\ H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$$

för alla positiva heltal n . (6p)

3. (a) Betrakta påståendena “Blommor är gröna eller röda” och “Alla växter är blommor”.
Skriv dem på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum). (3p)

(b) Låt nu universum vara mängden av alla grafer. Låt $B(x)$ vara predikatet “ x är bipartit”
och $E(x)$ vara predikatet “ x har en Eulercykel”. Skriv ut utsagan

$$\exists x : B(x) \wedge E(x)$$

med “vanliga ord” och avgör om den är sann eller falsk (motivering krävs). (3p)

Var god vänd!

4. Låt G vara en graf. En Hamiltonväg i G är en väg i G som går genom varje nod exakt en gång (Obs! En Hamiltonväg är inte en cykel).

(a) Låt K_n vara den fullständiga grafen med n noder. Rita K_4 och rita ut en Hamiltonväg i K_4 . (2p)

(b) Hur många Hamiltonvägar finns det i K_n ? (2p)

(c) Låt $K_{m,n}$ vara den fullständiga bipartita grafen på m respektive n noder. Visa att $K_{m,n}$ har en Hamiltonväg om och endast om $m = n$, $m = n + 1$ eller $m = n - 1$. (3p)

5. Definiera en relation $\sim$ på $\mathbb{Z}_+$ genom att säga att $a \sim b$ om och endast om $a \mid b$ eller $b \mid a$ (för $a, b \in \mathbb{Z}_+$).

(a) Visa att $\sim$ är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv. Vilka tal ingår i mängden $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \sim 6\}$? (3p)

(b) Låt R vara en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}_+$ och anta att $a \sim b$ medför att $a R b$. Visa att $a R b$ för alla $a, b \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

6. Bestäm alla heltalslösningar och den minsta positiva heltalslösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (6) \\ x \equiv 4 & (11) \\ x \equiv 12 & (13). \end{cases} \quad (6p)$$

7. I den här uppgiften är n ett positivt heltal.

(a) Visa att $4^n - 1$ är delbart med 3. För vilka n är $4^n - 1$ delbart med 15? (3p)

(b) För vilka n är $3^n - 2$ delbart med 7? (3p)

8. I den här uppgiften skall alla svar skrivas som explicita tal.

(a) En student skall åka och hälsa på sina kusiner. Studenten har 10 t-shirts varav tre är vita, tre är blå och resterande fyra har andra färger. Hon skall packa med sig 6 t-shirts till resan, men högst två av dem får vara vita och högst två får vara blå. På hur många sätt kan det göras? (4p)

(b) Studenten har tagit med sig 10 identiska karameller som hon skall ge till sina fyra kusiner. Varje kusin måste få minst en karamell, och två av kusinerna är tvillingar och de måste få lika många karameller. På hur många sätt kan det göras? (3p)

Lycka till!
Christian