Lösningsförslag Tenta 220114

Antecknin...	Lösningar omtentamen TMV200		
Skapad:	2022-01-19 13:37	**Ändrad:**	2022-01-19 16:28
Författare:	hchristian.johansson@gmail.com		

Lösningsförslag Tenta 220114

1. Vi gör ett motsägelsebevis, så antag att slutsatsen är falsk men hypoteserna är sanna.

Då är d falsk, men $c \vee d$ sann, så c måste vara sann. Eftersom $c \to (\neg b \wedge d)$ är sann och c är sann är $\neg b \wedge d$ sann, dvs b falsk och d sann.

Alltså är argumentet giltigt.

2. Vi gör ett induktionsbevis.

<u>Basfall $n=1$:</u> $\sum_{k=1}^{1} H_k = H_1 = 1$,

högerledet är $(1+1)H_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$,

så basfallet är ok.

<u>Induktionssteg:</u> Antag att $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$.

Vi vill visa att $\sum_{k=1}^{n+1} H_k = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$.

induktions-
- antagande

Vi har $\sum_{k=1} H_k = \left(\sum_{k=1} H_k \right) + H_{n+1} =$

$$= (n+1)H_n - n + H_{n+1} \underset{\uparrow}{=} (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + H_{n+1} =$$

rekursiv definition av H_{n+1}

$$= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} = (n+2)H_{n+1} - (n+1),$$

vilket är det vi ville visa. Alltså är induktionssteget ok, och enligt induktionsprincipen har vi visat att

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n \quad \text{för alla } n \in \mathbb{Z}_+.$$

3. a) Universum = alla växter.

Predikat: $B(x)$ = "x är en blomma".
$G(x)$ = "x är grön".
$R(x)$ = "x är röd".

"Blommor är gröna eller röda" kan skrivas som

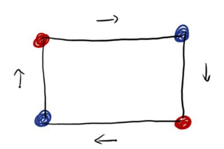
$$B(x) \longrightarrow (G(x) \vee R(x))$$

och "Alla växter är blommor" kan skrivas som

$$\forall x : B(x).$$

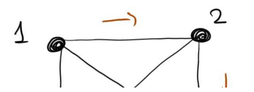
b) Utsagan $\exists x : B(x) \wedge E(x)$ kan utläsas "Det finns en bipartit graf som har en Eulercykel".

Utsagan är sann. Ett exempel på en sådan graf är 4-cykeln,

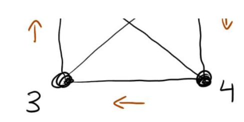


med en Eulercykel markerad och en färgning som gör den bipartit markerad.

4. a)



1, 2, 4, 3 är

K_4:  en Hamiltonväg.

b) Om $G=(V,E)$ är en graf och $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, så är en Hamiltonväg en uppräkning $v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ av V, där $\sigma: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ är en bijektion, så att det finns en kant mellan $v_{\sigma(i)}$ och $v_{\sigma(i+1)}$ för $i=1,\dots,n-1$.

Eftersom det finns kanter mellan alla noder i K_n, så finns det $n!$ Hamiltonvägar i K_n.

c) Låt $V = A \cup B$ vara uppdelningen i "röda" och "blå" noder i $K_{m,n}=(V,E)$, med $|A|=m$ och $|B|=n$.

Om $v_1, v_2, \dots, v_{m+n}$ är en Hamiltonväg så måste $v_1, v_3, v_5, \dots$ vara röda och $v_2, v_4, \dots$ vara blå eller vice versa, så vi måste ha $m=n$, $m=n+1$ eller $m=n-1$.

Låt $A=\{a_1,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$; Om $m=n$ är

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_m, b_n$$ en Hamiltonväg.

Om $m=n+1$ är

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{m-1}, b_n, a_m$$

en Hamiltonväg, och om $m=n-1$ är

$$b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{n-1}, a_m, b_n$$

en Hamiltonväg.

Det avslutar beviset.

5. a) <u>Reflexiv</u>: $a|a \ \forall a \in \mathbb{Z}_+$, så $a \sim a$ också.

<u>Symmetrisk</u>: Villkoret "$a|b$ eller $b|a$" är symmetriskt i a & b, så $\sim$ är symmetrisk.

Vi har $2 \sim$ … eftersom $2|6$

Ej transitiv: Vi har 2 ~ 6 eftersom 2 | 6,
och $6 \sim 3$ eftersom $3 \mid 6$,
men $2 \nsim 3$ eftersom $2 \nmid 3$ och
$3 \nmid 2$.

Sista biten: $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \sim 6\} =$

$$= \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid 6 \mid x \text{ eller } x \mid 6\} =$$

$$= \{\underbrace{1, 2, 3, 6}_{\text{tal som delar } 6}, \underbrace{12, 18, 24, \ldots}_{\text{tal som är delbara med } 6}\}$$

b) Observera att $a \sim 1$ $\forall a \in \mathbb{Z}_+$, eftersom $1 \mid a$. Om $a, b \in \mathbb{Z}_+$ har vi då att $a \sim 1$ och $1 \sim b$ (eftersom $\sim$ är symmetrisk). Det följer att $a R 1$ och $1 R b$, och eftersom R är transitiv gäller då att $a R b$.

6. Första ekvationen ger att $x = 6y + 1$ för något $y \in \mathbb{Z}$. Insättning i andra ekvationen ger

$$6y + 1 \equiv 4 \quad (11) \iff$$

$$\iff 6y \equiv 3 \quad (11).$$

Inversen till 6 mod 11 är 2 mod 11, så vi får

$$y \equiv 2 \cdot 6y \equiv 2 \cdot 3 = 6 \quad (11),$$

Så $y = 11z + 6$ för något $z \in \mathbb{Z}$.

Då är $x = 6y + 1 = 6(11z + 6) + 1 =$

$$= 66z + 37.$$

Insättning i tredje ekvationen ger

$$66z + 37 \equiv 12 \quad (13)$$

som förenklas till

$$z - 2 \equiv -1 \quad (13)$$

eftersom $66 \equiv 1 \ (13)$, $37 \equiv -2 \ (13)$ och $12 \equiv -1 \ (13)$.

Så $z \equiv 1 \ (13)$ dvs $z = 13m + 1$ för

så $z \equiv 1 \ (13)$, dvs $z = 13m+1$ för
något $m \in \mathbb{Z}$, och

$$x = 66z + 37 = 66(13m+1) + 37 =$$
$$= 858m + 103, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Det är den allmänna lösningen, och den minsta positiva heltalslösningen är 103.

7. a) $4 \equiv 1 \ (3)$, så $4^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \ (3)$,
dvs $3 \mid 4^n - 1$.

Eftersom $3 \mid 4^n - 1$ och $15 = 3 \cdot 5$ med 5 och 3 primtal, så gäller att
$$15 \mid 4^n - 1 \iff 5 \mid 4^n - 1.$$

Vi har $4 \equiv -1 \ (5)$, så

$$4^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv \begin{cases} -2, & n \text{ udda} \\ 0, & n \text{ jämnt} \end{cases} \mod 5,$$

så $15 \mid 4^n - 1$ om och endast om n är jämnt.

b) Vi har $3^1 = 3$, $3^2 = 9 \equiv 2 \ (7)$,
$3^3 \equiv 3^2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv -1 \ (7)$, $3^4 \equiv (-1) \cdot 3 \equiv 4 \ (7)$,
$3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 5 \ (7)$ och $3^6 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 1 \ (7)$,

så $3^n \equiv 2 \ (7) \iff n = 6m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.

8. a) De 6 t-shirtarna kan väljas på $\binom{10}{6} =$
$= \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ sätt om
vi inte har några restriktioner.

Antalet av dessa där hon valt 3 vita
är $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 35$ (välj de tre vita, och sen tre av övriga 7 t-shirtar).

På samma sätt är antalet med 3 blå också 35.

Eftersom antalet sätt där man valt 3 vita
och 3 blå är 1, så får vi att det finns

och 3 blå är 1, ...

210 − 35 − 35 + 1 = 141 sätt där högst två är vita och högst två är blå.

b) Först ger vi en karamell till varje kusin, då har vi 6 karameller kvar.
Trillingarna kan sen antingen få 0, 1, 2 eller 3 var (av de resterande 6).

Om de får 0, så kan övriga 6 ges till till de två andra kusinerna på 7 sätt.

Om trillingarna får 1 var, kan övriga 4 ges till de två andra kusinerna på 5 sätt.

Om trillingarna får 2 var, kan övriga 2 ges till de två andra kusinerna på 3 sätt.

Om trillingarna får 3 var, kan övriga 0 ges till de två andra kusinerna på 1 sätt.

Totalt får vi 7 + 5 + 3 + 1 = 16 sätt.