TMA683 Tillämpad matematik
Övningsuppgifter

28 oktober 2021

Fardin Saedpanah's version of this document from spring 2020 is acknowledge. Particularly relevant exercises are marked with $(*)$.

Propositions or hints for solutions are given at the end of the file.

Thank you for reporting typos or errors via email.

1. Linjära rum, skalärprodukt och L_p-normer

1.1 För ett heltal a, betrakta de delmängder av $\mathcal{P}^{(q)}(0,1)$ som består av alla polynom $p(t)$ av grad $\leq q$ sådana att

a) $2p(0) = p(1)$

b) $p(t) \geq 0$

c) $p(t) = p(1-t)$ för alla t.

Vilka av dessa delmängder är underrum i $\mathcal{P}^{(q)}(0,1)$?

1.2 Visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är en bas för $\mathcal{P}^{(2)}(\mathbb{R})$ då

a) $p_1(t) = (t+1)^2,\ p_2(t) = (t+2)^2,\ p_3(t) = (t+3)^2$

b) $p_1(t) = \frac{1}{2}(t-2)(t-3),\ p_2(t) = -(t-1)(t-3),\ p_3(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2).$

Ange också koordinaterna för polynomet t^2 i basen $\{p_1, p_2, p_3\}$.

1.3 Visa att följande funktioner är linjärt beroende (för $t \in \mathbb{R}$):

a) $\sin(2t),\ \cos(2t),\ \sin^2(t),\ \cos^2(t).$

b) $\ln(t^6+1),\ \ln(t^4-t^2+1),\ \ln(t^2+1).$

1.4 Visa att följande funktioner är linjärt oberoende (för $t \in \mathbb{R}$):

a) $\sin(t),\ \cos(t),\ \sin(2t),\ \cos(2t).$

b) $\mathrm{e}^t,\ \mathrm{e}^{t^2},\ \mathrm{e}^{t^3}.$

1.5 Undersök om mängden $\{1+t^3, 3+t-2t^2, -t+3t^2-t^3\}$ är linjärt beroende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$. Kan elementen utgöra en bas för $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$?

1.6 De fyra första s.k. Hermite-polynomen är $\{1, 2t, -2+4t^2, -12t+8t^3\}$. Visa att de är linjärt oberoende i $\mathcal{P}^{(3)}(\mathbb{R})$ och bestäm koordinaterna för $p(t) = 7-12t-8t^2+12t^3$ i denna bas.

1.7 Vi definierar skalärprodukt och L_2-norm för två funktioner f och g på ett intervall (a,b) enligt $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ resp. $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$. I analogi med vektorer i $\mathbb{R}^n$ definierar vi "vinkeln" θ mellan f och g genom

$$\langle f,g\rangle = \|f\|\cdot\|g\|\cos(\theta).$$

Vad är cosinus för "vinkeln" mellan funktionerna $f(x) = 3x+1$ och $g(x) = 5x^2+3$ på intervallet $(-1,1)$?

1.8 Visa att $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x \leq 1$.

1.9 $(*)$ Visa att i $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, med skalärprodukten

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

är funktionerna $\{1,\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sin(2x),\ \cos(2x),\ldots,\ \sin(nx),\ \cos(nx)\}$ sinsemellan ortogonala.
(Detta är fundamentalt i teorin för Fourierserier.)

1.10 För vilka värden på $a\in\mathbb{R}$ är funktionerna $1+at^2$ och $4t-a$ ortogonala i $\mathcal{P}^{(2)}(0,1)$?

1.11 Kan någon av följande två kandidater vara en skalärprodukt på $\mathcal{C}^1[a,b]$?
a) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
b) $\langle f,g\rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + f(a)g(a)$.

1.12 Låt $V = \mathcal{C}[0,1]$, dvs det linjära rummet som består av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$. För f och g i V definierar vi skalärprodukten av f och g som

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

och L_p-normen för $p = 1,2,\infty$ som

$$\|f\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\ p = 1,2$$

och

$$\|f\|_{L_\infty(0,1)} = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Bestäm $\langle f,g\rangle$, $\|f\|_{L_p(0,1)}$ och $\|g\|_{L_p(0,1)}$ för $p = 1,2,\infty$ i följande fall:
a) $f(x) = 1+x,\ g(x) = 2-x$
b) $f(x) = 1,\ g(x) = 3$
c) $f(x) = \frac{1}{2},\ g(x) = 3+2x$

d) $f(x) = 3x, \ g(x) = -4x^2$

e) $f(x) = x, \ g(x) = \mathrm{e}^x$

f) $f(x) = 1, \ g(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

2. Interpolation

2.1 (∗) Bestäm den styckvis linjära interpolanten $\pi_h f(x)$ då intervallet I delas in i tre lika stora delintervall, då

a) $f(x) = 9x^2 - x^4$, och $I = [0, 3]$

b) $f(x) = \sin(x)$, och $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, och $I = [1, \frac{5}{2}]$.

Använd också följande sats för att upskatta felet i approximationen i L_1- och L_∞-norm:

Let $\pi_h v(x)$ be the piecewise linear interpolant of the (sufficiently regular) function $v(x)$, for $x \in (a, b)$, on the partition $\mathcal{T}_h$ of $[0, T]$. For $p = 1, 2, \infty$, one then has

$$\|\pi_h v - v\|_{L_p(a,b)} \leq C \left\|h^2 v''\right\|_{L_p(a,b)} .$$

3. Finita differens-metoder

3.1 ($*$) Härled en finita differens-metod (dvs härled uttrycket för approximationen $\tilde{u}(t+\Delta t)$ som funktion av $\tilde{u}(t)$) för differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{u(t)}, \quad 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

med

a) Explicit Euler-metoden.

b) Implicit Euler-metoden.

c) Crank–Nicolson-metoden.

Implementera gärna metoderna i Matlab och jämför med den exakta lösningen $u(t) = \sqrt{u_0^2 + 2t}$.

3.2 Visa genom att Taylor-utveckla propagatorn för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$, $u(0) = u_0$ för respektive metod att

a) Implicit Euler-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^2$.

b) Crank–Nicolson-metoden har trunkeringsfel av ordning $(\Delta t)^3$.

3.3 Visa att både implicit Euler-metoden och Crank-Nicolson-metoden är stabila för alla $\Delta t > 0$ för ODE:n $\dot{u}(t) = \lambda u(t)$ med $\lambda < 0$ och $u(0) = u_0$.

4. Laplace transform (extrauppgifter)

(∗) Use Laplace transforms to solve the following initial-value problems:

4.1 $y'' - y = 1, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

4.2 $y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4.$

4.3 $4y'' + y = -2, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2.$

4.4 $y'' + 2y' + y = e^t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

4.5 $y'' + 2y' + 3y = 3t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Find the inverse Laplace transform of the following functions:

4.6 $\frac{1}{s(s+2)^2}$.

4.7 $\frac{1}{s^2+4s+29}$.

4.8 $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$.

4.9 $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$.

4.10 $\ln \frac{s+3}{s+2}$.

5. Fourier series (extrauppgifter)

The function f in the following exercises is assumed to be 2π-periodic, unless otherwise explicitly stated.

5.1 Find the Fourier series expansions of

a) $f(x) = |\sin(x)|$.

b) $f(x) = |\cos(x)|$.

5.2 ($*$) Use the Fourier series expansion for $f(x) = x^2,\ (-\pi < x < \pi)$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$

to show that

a) $x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx), \quad -\pi < x < \pi.$

b) $x^4 - 4\pi^2 x^2 = 48\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos(nx) - \frac{7\pi^4}{15}, \quad -\pi < x < \pi.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5.3 We define the even and odd parts of a function $f(x)$ by

$$f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{and} \quad f_o(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Show that $f_e(x)$ is an even function, and $f_o(x)$ is an odd function.

5.4 What are the even and odd parts of the following function?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

5.5 The function $f(x) = 2x,\ 0 \le x \le 1$ is periodic with period $P = 1$.

(a) Find the Fourier series expansion of $f(x)$.

(b) Use the result in (a) to compute the sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5.6 Assume that the function $f(x) = x^2,\ 0 < x < 2$ is 2-periodic. Find the Fourier series expansion of $f(x)$.

5.7 (a) Find the Fourier series expansion of the 2-periodic function f defined in $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & 1/2 < |x| \le 1. \end{cases}$$

(b) What is the series sum in the discontinuity points?

5.8 Assume that the function $f(x) = x,\ 0 < x < 2$, is 2-periodic.

(a) Find the complex Fourier series expansion of $f(x)$.

(b) Use (a) to give the real (cosinus-sinus form) Fourier series expansion of $f(x)$.

(c) Find all solutions to the differential equation

$$y''(x) - y(x) = f(x).$$

5.9 The function $f(x) = |x|^3$, for $|x| \leq 2$, is 4-periodic. Find the Fourier series expansion for both f and f'.

5.10 The data function $f(x) = x(2 - x)$, for $0 \leq x < 2$, is 2-periodic. Find a 2-periodic solution to the differential equation

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = f(x),$$

as a complex Fourier series.

6. Separation of Variables (extrauppgifter)

6.1 Solve the boundary value problem (Laplace's equation)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < \infty, \\ u(0,y) = u_x(2,y) = 0, & \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, & u(x,0) = 1, \quad 1 < x < 2. \end{cases}$$

6.2 Solve the boundary value problem (Laplace's equation)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \\ u(0,y) = u_x(a,y) = 0, & \\ u(x,0) = 0, & u(x,b) = x^2 - 2ax. \end{cases}$$

6.3 Solve the inhomogeneous boundary value problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y, & x > 0, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & \\ u(0,y) = y - y^3, & u \text{ is bounded as } x \to \infty. \end{cases}$$

6.4 (∗) Solve the initial-boundary value problem (heat equation)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 1, & u(\pi,t) = -1, \\ u(x,0) = \cos(x). & \end{cases}$$

6.5 Solve the following initial-boundary value problem (wave equation)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \qquad t > 0, \quad c > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & u_x(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = 1, & u_t(x,0) = -\cos(\frac{\pi}{\ell}x). \end{cases}$$

6.6 Solve the inhomogeneous initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad c > 0 \\ u(0,t) = 0, & u(\ell,t) = 1, \\ u(x,0) = 2\frac{x}{\ell} - 1. & \end{cases}$$

6.7 Solve the inhomogeneous problem

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

6.8 Solve the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \sin(\frac{2\pi x}{\ell}), & 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{cases}$$

6.9 Let $u(x,t)$ be the solution to the following problem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad c > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Show that for $t > 0$,

$$\int_0^\pi |u_t(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |g(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

6.10 Solve the differential equation

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - \pi^2 u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad c > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u_t(x,0) = 0, & u(x,0) = \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

6.11 A substance is diffusing in a straight cylindrical pipe of length ℓ with closed intersections. Suppose that the symmetry axis of the cylinder is aligned with the x-axis. If the density of substance at the point x at time t is denoted by $\rho(x,t)$, then $\rho(x,t)$ satisfies the diffusion equation

$$\rho_t = C\rho_{xx},$$

where C is a constant. Determine $\rho(x,t)$ if $\rho(x,0)$ varies linearly from 0 to ρ_0 as x goes from 0 to ℓ.

6.12 (∗) Solve the following inhomogeneous initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \mathrm{e}^{-t}\sin(3x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 1, & u(x,0) = 2. \end{cases}$$

6.13 Compute the stationary temperature $u(x,y)$ in the square plate

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 100, \ \ 0 \leq y \leq 100\},$$

if the side $y = 100$ is kept at temperature $100^\circ\, C$ and all other sides at the temperature $0^\circ\, C$. Determine, in particular, the stationary temperature at the midpoint of the plate.

Hint: The stationary heat equation satisfies Laplace's equation.

6.14 a) Determine the function $u(x,t)$ satisfying:

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = (1-x)\theta(1-x) \quad u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

b) Determine $u(x, \frac{1}{2})$.

6.15 Solve the problem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 0, & u_y(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0,y) = 0, & u(1,y) = y^2 - 2y. \end{cases}$$

7. Convolution

7.1 Compute $(f * g)(t)$ when

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ and $g(t) = t\theta(t)$.

b) $f(t) = (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})\theta(t)$ and $g(t) = \mathrm{e}^{t}\theta(t)$.

7.2 Use the convolution theorem to compute the inverse Laplace transform of

a) $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ *Hint:* $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$.

b) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+9)}$.

Svar

1. Linjära rum

1.1 a) och c)

1.2 a) Koordinater för t^2 är $(3, -3, 1)$.
b) Koordinater för t^2 är $(1, 4, 9)$.

1.3 *Ledning:* a) Använd trigonometriska formler; b) faktorisera $t^6 + 1$.

1.4 *Ledning:* Sätt linjärkombinationen $= 0$ (för alla t). Gör intelligenta val av t som ger ett ekvationssystem för koefficienterna med endast noll-lösning.

1.5 De är linjärt oberoende men kan ej utgöra en bas, ty dimensionen av $\mathcal{P}_3$ är 4 (och det räcker alltså inte med 3 basvektorer för att spänna rummet).

1.6 Koordinaterna är $(3, 3, -2, 3/2)$.

1.7 $\cos(\theta) = \frac{7}{6\sqrt{6}}$

1.8 *Ledning:* Använd Cauchy–Schwarz olikhet.

1.9 *Ledning:* Använd trigonometriska formler, alt. partialintegrera två gånger.

1.10 $a = \pm\sqrt{6}$

1.11 b) men ej a).

1.12

	$\|f\|_{L_1}$	$\|f\|_{L_2}$	$\|f\|_{L_\infty}$	$\|g\|_{L_1}$	$\|g\|_{L_2}$	$\|g\|_{L_\infty}$	$\langle f, g\rangle$
a)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$	2	$\frac{13}{6}$
b)	1	1	1	3	3	3	3
c)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	5	2
d)	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	4	-3
e)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\mathrm{e} - 1$	$\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)}$	e	1
f)	1	1	1	$1 + \sin(1) - \cos(1)$	$\sqrt{\frac{1}{2}(3 - \cos(2))}$	$\sqrt{2}$	$1 + \sin(1) - \cos(1)$

2. Interpolation

2.1 a)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} 8x, & x \in [0,1) \\ 12x - 4, & x \in [1,2) \\ 60 - 20x, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0,3)} \leq (54 + 12\sqrt{6})c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0,3)} \leq 90c$ för någon interpolationskonstant c.

b)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x, & x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ \frac{3}{\pi}(\sqrt{3} - 1)x + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}) \\ \frac{3}{\pi}(2 - \sqrt{3})x + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, & x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0,\frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0,\frac{\pi}{2})} \leq \frac{\pi^2}{36}c$ för någon interpolationskonstant c.

c)

$$\pi_h f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(5 - 2x), & x \in [1, \frac{3}{2}) \\ \frac{1}{6}(7 - 2x), & x \in [\frac{3}{2}, 2) \\ \frac{1}{10}(9 - 2x), & x \in [2, \frac{5}{2}]. \end{cases}$$

Feluppskattningar: $\|\pi_h f - f\|_{L_1(0,\frac{5}{2})} \leq \frac{21}{100}c$; $\|\pi_h f - f\|_{L_\infty(0,\frac{5}{2})} \leq \frac{1}{2}c$ för någon interpolationskonstant c.

3. Finita differens-metoder

3.1 a) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \tilde{u}(t) + \Delta t/\tilde{u}(t)$.

b) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \frac{\tilde{u}(t)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tilde{u}}{2}\right)^2 + \Delta t}$.

c) $\tilde{u}(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\tilde{u}(t) + \frac{\Delta t}{2\tilde{u}(t)}\right)^2 + \frac{\Delta t}{2}}$.

3.2 b) *Lösning:* Den exakta lösningen på intervallet $[0, \Delta t]$ är $u(\Delta t) = u_0 \exp(\lambda \Delta t)$, så propagatorn för den exakta lösningen är $P_0(\Delta t) = \exp(\lambda\Delta t)$.

Propagatorn för Crank–Nicolson-metoden för den givna differentialekvationen är $P_{CN}(\Delta t) = \frac{1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1-\frac{1}{2}\lambda\Delta t}$.

Taylor-utveckling av P_0 (med variabeln $\lambda\Delta t$) ger

$$\exp(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\lambda\Delta t)^3 + \dots \tag{1}$$

medan Taylor utveckling av nämnaren i P_{CN} ger

$$\begin{aligned}\frac{1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1-\frac{1}{2}\lambda\Delta t} &= \left(1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t\right)\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t + (\frac{1}{2}\lambda\Delta t)^2 + (\frac{1}{2}\lambda\Delta t)^3 + \dots\right) \\ &= 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2 + \frac{1}{4}(\lambda\Delta t)^3 + \dots\end{aligned} \tag{2}$$

Om vi jämför (2) med (1) ser vi att utvecklingarna är lika till och med ordning $(\Delta t)^2$, vilket innebär att skillnaden, dvs trunkeringsfelet, är av ordning $(\Delta t)^3$.

3.3 *Ledning:* Visa att $|P(\Delta t)| < 1$ för alla $\Delta t > 0$, där $P(\Delta t)$ är propagatorn för respektive metod. Kom ihåg att $\lambda < 0$.

4. Laplace-transformer

4.1 $y(t) = \mathrm{e}^t - 1.$

4.2 $y(t) = \mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^t.$

4.3 $y(t) = -2 + 2\cos(t/2) + \sin(t/2).$

4.4 $y(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}.$

4.5 $y(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t + t - \frac{2}{3}.$

4.6 $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-2t}.$

4.7 $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}\sin(5t).$

4.8 $t\sin(t).$

4.9 $\frac{3}{2}\sin(t) + \frac{3}{2}t\cos(t).$

4.10 $\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}).$

5. Fourier series

5.1 a) $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$.

b) $|\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2nx)}{4n^2-1}$.

5.2 -

5.3 -

5.4

$$f_e(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} x^2+\mathrm{e}^x, & x<0 \\ x^2+\mathrm{e}^{-x}, & x>0. \end{cases} \qquad f_o(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} x^2-\mathrm{e}^x, & x<0 \\ \mathrm{e}^{-x}-x^2, & x>0. \end{cases}$$

5.5 a) $f(x) \sim 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2n\pi x)$.

b) $\pi^2/6$.

5.6 $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\pi x) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)$.

5.7 a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos((2n-1)\pi x)$.

b) 1/2.

5.8 a) $f(x) = 1 - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{in\pi}\mathrm{e}^{in\pi}$.

b) $f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)$.

c) $y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad y_h(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$,

$y_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\mathrm{e}^{in\pi x}, \quad y_0 = -1, \quad (1+n^2\pi^2)y_n = \frac{1}{in\pi}, \ n\neq 0$

5.9

$$f(x) = 2 + \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n(n^2\pi^2-2)}{n^4}\cos(\frac{n\pi}{2}x).$$

$$f'(x) = -\frac{24}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n(n^2\pi^2-2)}{n^3}\sin(\frac{n\pi}{2}x).$$

5.10

$$y(x) = \frac{1}{3} + 2\sum_{n\neq 0} \frac{\mathrm{e}^{in\pi x}}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 - in\pi - 2)}.$$

6. Separation of Variables

6.1 $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n)}{\alpha_n} \mathrm{e}^{-\alpha_n y} \sin(\alpha_n x), \qquad \alpha_n = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}.$

6.2 $u(x,y) = \frac{-4a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3} \sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi y}{a}}{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi b}{a}}.$

6.3 $u(x,y) = \frac{1}{6}(y^3-y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^n}{2(n\pi)^3} \mathrm{e}^{-n\pi x} \sin(n\pi y).$

6.4 $u(x,t) = 1 - \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((-1)^{k+1} - 1\Big) \frac{2}{k(k^2-1)\pi} \mathrm{e}^{-k^2 t} \sin(kx).$

6.5 $u(x,t) = 1 - \frac{\ell}{\pi c} \cos(\frac{\pi x}{\ell}) \sin(\frac{\pi c t}{\ell}).$

6.6 $u(x,t) = \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin(\frac{n\pi}{\ell}x).$

6.7 $u(x,t) = 1 - x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$

6.8 $u(x,t) = \Big(\frac{\ell}{2\pi}\Big)^2 \Big(\mathrm{e}^{-\frac{4\pi^2 t}{\ell^2}} - 1\Big) \sin(\frac{2\pi x}{\ell}).$

6.9 -

6.10 $u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin(2k\pi x) \cos\Big(\sqrt{4k^2+1}\pi t\Big).$

6.11 $\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{2} - \frac{4\rho_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \mathrm{e}^{-\frac{C(2n-1)^2\pi^2 t}{\ell^2}} \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}).$

6.12 $u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{n} \mathrm{e}^{-n^2 t} \sin(nx) + \frac{x}{\pi} + \frac{1}{8}\Big(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-9t}\Big) \sin(3x).$

6.13

$$u(x,y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\sinh((2k-1)\pi)} \sinh(\frac{(2k-1)\pi y}{100}) \sin(\frac{(2k-1)\pi x}{100}),$$

$$u(50,50) = \frac{200}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)\cosh(\frac{(2k-1)\pi}{2})} \approx 25^\circ\, C.$$

6.14 a) $u(x,t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\frac{n\pi}{2} - \sin(\frac{n\pi}{2})\Big)\cos(n\pi t)\sin(\frac{n\pi x}{2})$.

b) $u(x,\frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\pi x)$.

6.15 $u(x,y) = \frac{1}{2}(y^2-y) + \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh((n+\frac{1}{2})\pi(1-x)) - \sinh((n+\frac{1}{2})\pi x)}{(n+\frac{1}{2})^3\sinh((n+\frac{1}{2})\pi)}\sin((n+\frac{1}{2})\pi y)$.

7. Convolution

7.1 a) $(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2/2, & 0 \le t < 1 \\ t - 1/2, & t \ge 1. \end{cases}$

b) $(f * g)(t) = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t})\theta(t)$

7.2 a) $\frac{1}{3}\sin(t) - \frac{1}{6}\sin(2t)$, b) $\frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\sin(3t)$.