David Cohen (david.cohen@chalmers.se) Chalmers & GU

PROJEKT
(10 november 2021)

Detta projekt är inspirerat av det som Fardin Saedpanah skrev i 2019.
An English version is attached at the end of the document.

1. Instruktioner

Det här projektet har två delar: en teoretisk del (inlämnas senast 6 december) och en praktisk del (inlämnas senast 10 januari). Endast en lösning per grupp (av max 3 studenter) skall lämnas in i Canvas. Skriv namn och personnummer på alla gruppmedlemmar. Vid behov ges möjlighet till en komplettering som ska lämnas in senast 18/12, resp. 18/01. Resultat meddelas i Canvas.

2. Problemformulering

Vi ska studera materialtransport av ett salt löst i vatten i en endimensionell kanal av längd L (m). Diffusiviteten för saltet i vattnet är D (m^2/s) och vattnet strömmar genom kanalen med en hastighet c (m/s). Salt tillförs genom kanalens väggar med en intensitet f (mol/ms). I ändarna av kanalen finns filter genom vilket fluxet av salt är proportionellt mot koncentrationen med proportionalitetskonstanter k_0 respektive k_L (m/s). Vid tiden $t = 0$ är koncentrationen av salt i kanalen u_0.

Detta beskrivs matematiskt av modellen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad 0 < t \le T, \tag{1a}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k_0 u(0,t) + cu(0,t), \qquad 0 < t \le T, \tag{1b}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k_L u(L,t) + cu(L,t), \qquad 0 < t \le T, \tag{1c}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 < x < L, \tag{1d}$$

där $u(x,t)$ är koncentrationen av salt (mol/m) och T är en sluttid.

3. Uppgifter

3.1. Teoretisk del, inlämnas senast 6 december.

Uppgift:
Härled variationsformulering, finita elementformulering, och tidsstegningsschema (jämför Studio II) för problemet (1a)-(1d).
Tips: Randvillkoren (1b) och (1c) kommer ge upphov till ytterligare en matris (med bara två nollskilda element) i det diskreta ekvationssystemet.

Inlämning:
Datorskrivna lösningar eller inscannade handskrivna lösningar laddas upp i Canvas i pdf-format senast 6/12.

3.2. Praktisk del, inlämnas senast 10 januari.

Uppgift:

(a) Implementera tidsstegningschemat från ovanför teoretiska del i Matlab.

(b) Välj $L = 1$, $T = 2$, $D = 1$, $u_0(x) = 10x(1 - x)$, och

$$f(x,t) = \begin{cases} 100\exp(-100(x - 1/4)^2), & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Använd er kod för att studera konvektionens och randvillkorens kvalitativa inverkan på lösningens beteende. Intressanta värden att studera är till exempel olika kombinationer av $c = 0, 1, 10, -10$, $k_0 = 0, 1, 10^5$, och $k_L = 0, 1, 10^5$. Betrakta åtminstone fem olika kombinationer.
Skapa animeringar av resultaten med hjälp av nedanstående kod. Resonera kring den fysikaliska rimligheten av era resultat.

Inlämning:

Animeringar, pdf-dokument med resonemang och analys av resultaten, samt Matlabkod laddas upp i Canvas senast 10/01, lämpligtvis i en zip-fil.

Matlabkod för animering:

```
videoname = % Ange namn som en textsträng
vidobj = VideoWriter(videoname);
vidobj.FrameRate = 10;
open(vidobj)
for % Loop över tidsstegen
    % Plotta resultat vid tidssteget
     writeVideo(vidobj, getframe(gcf))
end
close(vidobj)
```

1. Instructions

This project consists of two parts: a theoretical one (to be submitted on Canvas by December 6) and a practical one (to be submitted on canvas by January 10). Only one report per group (of at most 3 students) should be submitted on Canvas. Write the name and social security number of each group members. If necessary, one has the possibility to complete or correct an already submitted report by 18/12, resp. 18/01. Results will be posted on Canvas.

2. Formulation of the problem

We shall study material transport of salt dissolved in water in a one-dimensional channel of length L (m). The diffusivity of the salt in water is denoted by D (m^2/s) and the water flows through the channel at speed c (m/s). The salt is added through the channels walls with an intensity of f (mol/ms). At the ends of the channel there are filters through which the flux of salt is proportional to the concentration with proportionality constants k_0, resp. k_L (m/s). At time $t = 0$, the concentration of sal in the channel is u_0.

The above can be mmodeled by the following partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \qquad 0 < x < L, \quad 0 < t \le T, \tag{1a}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k_0 u(0,t) + cu(0,t), \qquad 0 < t \le T, \tag{1b}$$

$$D\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -k_L u(L,t) + cu(L,t), \qquad 0 < t \le T, \tag{1c}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 < x < L, \tag{1d}$$

where $u(x,t)$ is the concentration of salt in (mol/m) and T denotes the final time.

3. Tasks

3.1. Theoretical part, to be submitted by December 6.

Tasks:

Derive a variational formulation, a finite element formulation, and a time discretisation (compare to Studio II) for the above problem (1a)-(1d).

Tips: The boundary conditions (1b) and (1c) will give rise to yet another matrix (with only two non-zero elements) in the final linear system of equations.

Submission:

Computer-written or scanned hand-written solutions are uploaded to Canvas in a single .pdf file at the latest 6/12.

3.2. Practical part, to be submitted by January 10.

Tasks:

(a) Implement a time discretisation scheme for the above theoretical part in Matlab.

(b) Choose $L = 1$, $T = 2$, $D = 1$, $u_0(x) = 10x(1-x)$, and

$$f(x,t) = \begin{cases} 100\exp(-100(x-1/4)^2), & t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Use your code to study how convection and boundary conditions qualitatively affect the behavior of the numerical solution. Interesting values to study are, for instance, different combinations of $c = 0, 1, 10, -10$, $k_0 = 0, 1, 10^5$, and $k_L = 0, 1, 10^5$. Consider at least five different cases.

Create animations of your numerical results using the code below for example. Discuss how reasonable your simulations are from a physical viewpoint.

Submission:

The animations as well as your report (in .pdf format), and your Matlab codes have to be uploaded to Canvas no later than 10/01, preferably as a .zip file.

Indicative Matlab code for the animations:

```
videoname = % enter the name as a text string
vidobj = VideoWriter(videoname);
vidobj.FrameRate = 10;
open(vidobj)
for % loop over the time steps
    % plot of your results at the given time step
     writeVideo(vidobj, getframe(gcf))
end
close(vidobj)
```