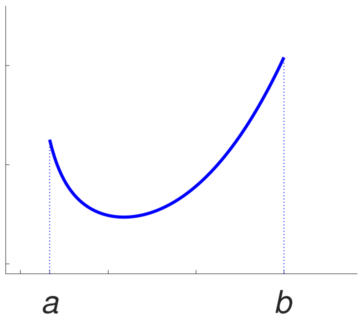
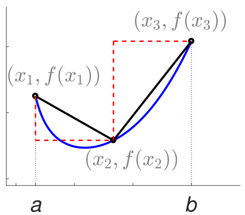
Kurvlängd

Vi ska härleda ett uttryck för **längden** L **av kurvan** $y = f(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$



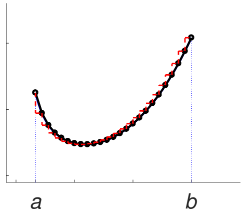
Vi kan **approximera** L genom att summera delsträckor i polygontåg:



Längden av polygontåget ges av Pythagoras sats:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (f(x_3) - f(x_2))^2}$$

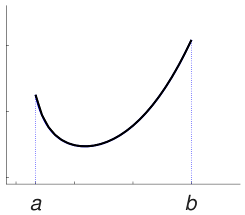
Om vi väljer fler punkter i polygontåget får vi en bättre approximation av längden.



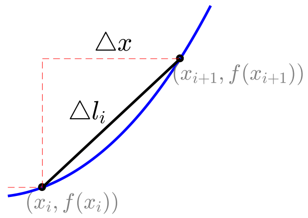
Summan av delsträckornas längder ger längden av hela polygontåget:

$$L \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Om vi låter antalet punkter $\to \infty$ försvinner felet i vår approximation



$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$



Låt $\triangle x = (x_{i+1} - x_i)$. Längden av i:e delsträckan i polygontåget ges av:

$$\triangle l_i = \sqrt{\triangle x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

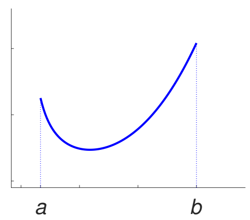
Medelvärdessatsen (sid 288 Stewart) ger oss att

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \triangle x f'(c_i) \text{ där } c_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Så

$$\triangle l_i = \sqrt{\triangle x^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} = \sqrt{\triangle x^2 + (\triangle x f'(c_i))^2} = \sqrt{\triangle x^2(1 + f'(c_i)^2)} = \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\triangle x$$

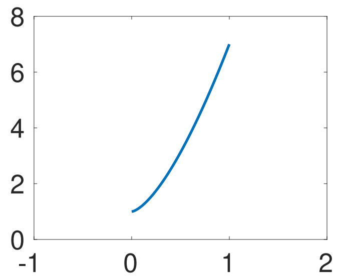
Längden av L av kurvan blir alltså



$$L = \lim_{n\to\infty} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1} f(x_i))^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\, \triangle x =$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

- Vi har valt steglängden $(x_{i+1} - x_i)$ konstant, så att $(x_{i+1} - x_i) = \triangle x$ för alla i.
- Den sista likheten är definition av begränsad integral (sid 378 i Stewart).

Exempel: Beräkna längden på grafen till $f(x) = 1 + 6x^{3/2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$



Lösning:

$f(x) = 1 + 6x^{3/2} \qquad f'(x) = 9x^{1/2} \qquad 1 + f'(x)^2 = 1 + 81x$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 81x}\, dx = \begin{pmatrix} u = 1 + 81x \\ du = 81dx \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \int_1^{82} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2}\right]_1^{82} = \frac{2}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$$

- Den här typen av integraler kan ofta bli lite bökiga att lösa analytiskt. Viktiga tekniker för att hitta primitiva funktioner till integraler är **variabelsubstitution** och **partiell integrering** (från förra läsperioden).
- Ibland kan man inte bestämma en användbar primitiv funktion. Då löser man integralen med hjälp av någon numerisk programvara, t.ex. Matlab.

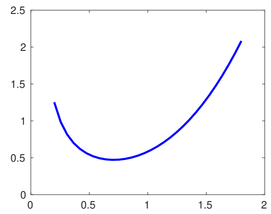
I Matlab använder man kommandot `integral`:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 81x}\, dx$$

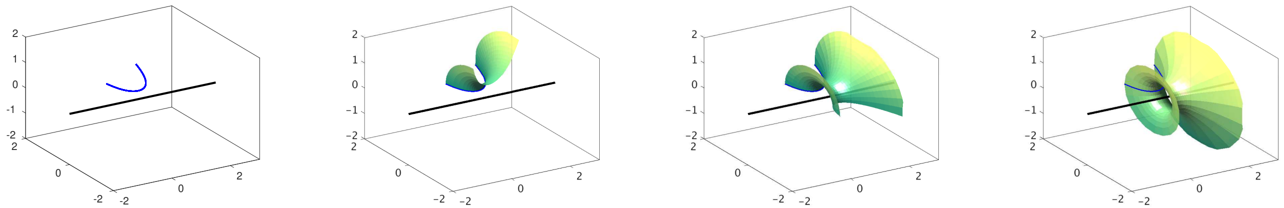
```
f = @(x)sqrt(1+81*x);
L = integral(f,0,1);
```

Mantelarea

Betrakta **kurvan** som ger grafen av $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$.

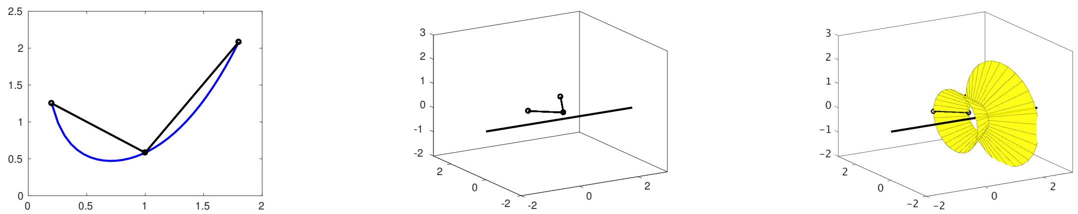


Låter vi denna kurva rotera runt x-axeln får vi en **rotationsyta**

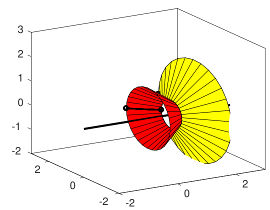


Vi vill beräkna **arean** S av rotationsytan

Vi kan approximera arean genom att rotera ett polygontåg som approximerar kurvan

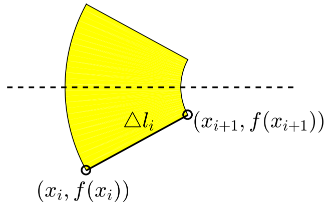


och sedan summera mantelareor för de stympade koner som blir resultatet



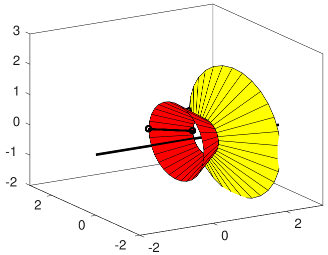
Om vi klipper upp en stympad kon längs en sida och veklar upp den ser den ut som bilden till höger. Aran ges av

$$2\pi \left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right| \triangle l_i$$



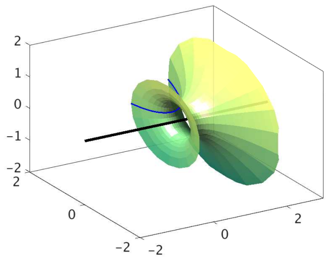
Areorna för $(n-1)$ stympade koner blir

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right| \triangle l_i$$



Om vi låter antalet punkter i polygontåget $\to \infty$ försvinner felet i vår approximation.

$$S = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right| \triangle l_i$$



Vi ser att när $n \to \infty$:

- Längden på i:e sträckan i poygontåget $\triangle l_i \to \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \triangle x$
- $\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \approx f(c_i)$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

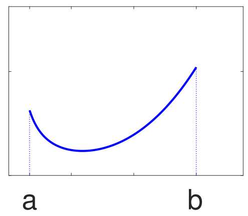
Så

$$S = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right| \triangle l_i = \lim_{n\to\infty} 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} |f(c_i)| \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \triangle x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Den sista likheten är definition av begränsad integral (sid 378 i Stewart).

Längden L till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av (Stewart 8.1)

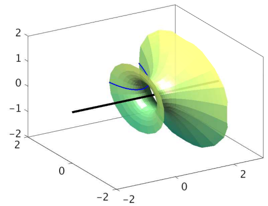
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx$$



Låter vi kurvan rotera runt x-axeln får vi en rotationsyta med mantelarea S och volym V

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx \quad \text{(Stewart 8.2)}$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\; dx \quad \text{(Stewart 6.2)}$$



Låter vi kurvan rotera runt y-axeln får vi mantelarea S och volym V

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx \quad \text{(Stewart 8.2)}$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\; dx \quad \text{(Stewart 6.2)}$$