

Beräkningsmatematik – Dugga

Datum: — Tid: ca 40 min.

För godkänt på duggan krävs minst 3 av totalt 6 poäng.

Hjälpmedel: Inga.

Texta tydligt!

Namn:

Födelsedatum: (på formen ÅÅMMDD)

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
Summa:	

Uppgift 1. Beräkna lösningen till differentialekvationen

(2 poäng)

$$\begin{cases} y' + 2xy = x, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning:

Svar: $y(x) =$

Uppgift 2. Beräkna lösningen till differentialekvationen

(3 poäng)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x, & 0 < x < \pi/2 \\ y(0) = 1, & y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Lösning:

Svar: $y(x) =$

Uppgift 3. Beräkna arean S av ytan som uppstår när kurvan

(1 poäng)

$$y = \frac{1}{3}x^3, 1 \leq x \leq 2$$

roteras runt x -axeln.

Lösning:

Svar: $S =$

Lösningar övningsdugga.

Uppgift 1. Integrerande faktor: $e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$$e^{x^2} y' + 2xe^{x^2} y = e^{x^2} x \Leftrightarrow (e^{x^2} y)' = e^{x^2} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} y = \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{-x^2})$$

Uppgift 2. Homogenlösning till $y'' - 2y' + 2y = 0$: Karakt. ekv. $r^2 - 2r + 2 = 0$ med rötter $r_{1,2} = 1 \pm i$ ger

$$y_h(x) = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

Partikulärlösning till $y'' - 2y' + 2y = e^x$: Ansätt $y_p(x) = A e^x$. Insättning i ekvationen ger $A = 1$ och $y_p(x) = e^x$. Vi får

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x (1 + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

Randvillkor

$$y(0) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0, \quad y(\pi/2) = e^{\pi/2}(1 + C_2) = 0 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$y(x) = e^x (1 - \sin(x))$$

Uppgift 3. Vi har $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ med $f'(x) = x^2$ och får

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_1^2 2\pi \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \frac{2}{3}\pi \int_1^2 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = \\ &= \frac{\pi}{9} [(1 + x^4)^{3/2}]_1^2 = \frac{\pi}{9} (17^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{\pi}{9} (17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$