Övningarna

Lös differentialekvationerna analytiskt

$$(9.3.1): \; y'(x) = 3x^2y^2 \quad \text{och} \quad (9.3.5): \; (e^y - 1)y' = 2 + \cos(x)$$

Lös begynnelsevärdesproblemen analytiskt

$$(9.3.11): \; \frac{dy}{dx} = xe^y, y(0) = 0 \qquad (9.3.13): \; y'(x) = x/y, y(0) = -3$$

$$(9.3.15): \; x \ln x = y(1 + \sqrt{x^2+1})y' = 0, y(1) = 1$$

Differentialekvationer används ofta för att modellera/beskriva olika fenomen över tid. Differentialekvationerna i uppgifterna nedan är alla exempel på det. (Alla sambanden är exempel på separabla differentialekvationer[1] - och löses genom att man utnyttjar derivatan av en sammansatt funktion, enligt ovan).

9.3.37 I en viss elektrisk krets ger Kirchofs spänningslag relationen

$$R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

där $Q(t)$ betecknar en kondensators laddning vid tiden t, C är kondensatorns kapacitans, $I(t)$ strömmen vid tiden t och R resistansen i kretsen. Om man utnyttjar sambandet $I(t) = Q'(t)$ får man differentialekvationen

$$R \cdot Q'(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

Låt resistansen $R = 5\Omega$, kapacitansen $C = 0.05F$ och spänningen konstant $E(t) = 60V$. Lös differentialekvationen när $Q(0) = 0C$ och beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} Q(t)$.

9.3.39 En inlärningskurva är en grafisk representation av hur inlärning ökar med erfarenhet och kan beskrivas av en funktion $P(t)$, där t är träningstiden. Derivatan $P'(t)$ beskriver inlärningshastigheten och kan beskrivas med följande samband

$$P'(t) = k(M - P(t))$$

där M representerar värdet då man är fullärd och $k > 0$ är en konstant.

(a) Lös differentialekvationen, dvs bestäm $P(t)$. Beräkna också gränsvärdet $\lim_{p\to\infty} P(t)$
(b) För en viss stavhoppare gäller att $P(0) = 2$ meter, $M = 6$ meter och $k = 0.024$. Efter hur lång träningstid hoppar stavhopparen 4 meter?

9.3.43 A glucose solution is administered intravenously into the bloodstream at a constant rate r. As the glucose is added, it is converted into other substances and removed from the bloodstream at a rate that is proportional to the concentration at that time. Thus a model for the concentration $C = C(t)$ of the glucose solution in the bloodstream is

$$\frac{dC}{dt} = r - k \cdot C$$

where k is a positive constant.

(a) Suppose that the concentration at time $t = 0$ is C_0. Determine the concentration at any time by solving the differential equation.

(b) Assuming that $C_0 < r/k$ find $\lim_{t\to\infty} C(t)$ and interpret your answer.

[1] Vissa av sambanden är också linjära, och kan även lösas med lösningsmetoder som diskuteras nästa vecka.

9.3.45 I en behållare finns 1000 liter vatten av en saltlösning som från början har koncentrationen 15 g/liter. Genom ett rör tillförs 10 liter/minut rent vatten (saltkoncentration 0 g/liter). Genom ett annat rör avtappas samtidigt lika stor mängd av lösningen i behållaren. Lösningen hålls homogen genom effektiv omrörning i kärlet.

(a) Hur mycket salt finns i behållaren efter t minuter?

(b) Hur mycket salt finns i behållaren efter 20 minuter?

9.3.47 Ett kärl innehåller 2000 liter öl med 4% alkohol (volymprocent). Genom ett rör tillförs 20 liter/minut av öl med koncentrationen 6% alkohol och genom ett annat rör avtappas samtidigt lika stor mängd öl i kärlet. Hur många procent alkohol innehåller behållaren efter en timme?

Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper. Allra sist i dokumentet (under rubriken Svar) finns beskrivet hur du själv fixar ett facit till några av övningarna med hjälp av Matlab.

9.3: En separabel differentialekvation kan skrivas på formen

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

För att få fram lösningarna till ekvationen integrerar man vänster- och högerled. Lösningarna ges av

$$H(y(x)) = G(x) + C, \text{ där } C \text{ är en konstant}$$

9.3.1 $y'(x) = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{1}{y(x)^2}y'(x) = 3x^2$, $y(x) \neq 0$. Bestäm $H(y(x))$ och $G(x)$ genom att integrera $\frac{1}{y(x)^2}$ m.a.p. y och $3x^2$ m.a.p. x. Lös ut $y(x)$, kontrollera också lösningen $y(x) = 0$. (Det finns ett liknande exempel i föreläsningsanteckningarna.)

9.3.5 $(e^{y(x)} - 1)y'(x) = 2 + \cos(x)$. Det går bara att bestämma $y(x)$ implicit.

9.3.11 $y'(x) = xe^y, y(0) = 0$. Bestäm $y(x)$ på vanligt sätt (identifiera $h(y(x))$, $g(x)$ och integrera h m.a.p. y och g m.a.p. x.). Använd villkoret $y(0) = 0$ för att bestämma konstanten C i lösningen.

9.3.13 Samma lösningsgång som i 9.3.11

9.3.15 $x\ln(x) = y(x)(1 + \sqrt{3 + y(x)^2})y'(x)$, $y(1) = 1$. Samma lösningsgång som i 9.3.11. (Använd förslagsvis partiell integrering för att bestämma $\int x\ln(x)dx$)

9.3.37 Vi har $5 \cdot Q'(t) + \frac{1}{0.05} \cdot Q(t) = 60 \Leftrightarrow Q'(t) = 12 - 4Q(t)$, så vi ska lösa

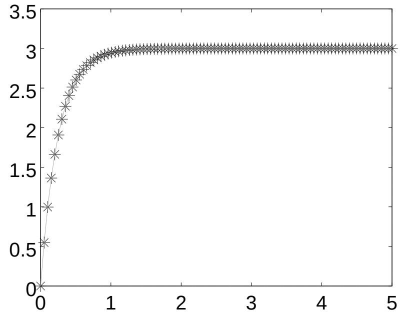
$$\frac{1}{12 - 4Q(t)}Q'(t) = 1 \text{ , med } Q(0) = 0$$

Vi får $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$ (genomför beräkningarna), och $\lim_{t\to\infty} Q(t) = 3$

De tre första raderna i matlabkoden nedan ritar grafen för $Q(t)$ på intervallet $0 \leq t \leq 5$. De tre sista raderna i exemplet löser differentialekvationen numeriskt med kommandot `ode45` och markerar den numeriska lösningen med * i figuren. (Kommandot `ode45` används i senare laborationer i kursen).

```
Q=@(t)3-3*exp(-4*t);
t=linspace(0,5);
plot(t,Q(t)); hold on

f=@(t,u)12-4*u;
[t,U]=ode45(f,[0,5],0);
plot(t,U,'*'); hold on;
```



9.3.39 (a) Vi kan göra omskrivningen

$$\frac{1}{P(t)-M}P'(t) = -k$$

och bestämma $P(t)$. (Det är rimligt att anta att $P(0) = 0$, så använd dig av det när du bestämmer värdet på konstanten i lösningen och beräknar gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} P(t)$).

(b) $P(t) = M - C \cdot e^{-kt}$ och $P(0) = 2 \Rightarrow C = 4$. Efter ca. 28.9 tidsenheter hoppar stavhopparen 4 meter.

9.3.43 Koncentrationen $C(t)$ i tiden t ges av sambandet $C'(t) = r - k \cdot C(t)$, r och k konstanter.

(a) Vi har $\dfrac{1}{k \cdot C(t) - r}C'(t) = -1$. Lös differentialekvationen.

Vi får (genomför beräkningarna) $C(t) = Ke^{-kt} + \dfrac{r}{k}$, där K är en konstant.

Låt startkoncentrationen $C(0) = C_0$. Bestäm konstanten K. Vi får (genomför beräkningarna) $K = C_0 - \dfrac{r}{k}$

(b) Koncentrationen närmar sig r/k oavsett startvärdet C_0.

9.3.45 Låt saltmängden vid tiden t vara $y(t)$. Enligt den fysikaliska tolkningen av derivatan beskriver $y'(t)$ ökning per tidsenhet. Derivatan kan uttryckas som den tillförda saltmängden per minut, dvs 0, minus den bortförda saltmängden minut, dvs. $10\dfrac{y(t)}{1000}$ liter per minut. Det gäller alltså att

$$y'(t) = 0 - \frac{y(t)}{100}$$

Vi vet också att startkoncentrationen av salt är $y(0) = 15 \cdot 1000 = 15$ kg.

(a) Vi har $\dfrac{1}{y(t)}y'(t) = -\dfrac{1}{100}$, $y(0) = 15$. Bestäm $y(t)$

(b) Beräkna $y(20)$ ($y(20) \approx 12.3$ kg).

9.3.47 $y(t)$ är mängden alkohol efter t minuter.

· Mängden alkohol efter 0 minuter $y(0) = 0.04 \cdot 2000 = 80$.

· Förändringen av alkoholmängden (mängd in - mängd ut):

$$y'(t) = 0.06 \cdot 20 - \frac{y(t)}{2000} \cdot 20 = \frac{120 - y(t)}{100}$$

Vi har sambandet $y'(t) = \dfrac{120 - y(t)}{100}$, $y(0) = 0.04 \cdot 2000 = 80$ och vill bestämma $y(60)$. Så

$$\frac{1}{120 - y(x)} y'(t) = \frac{1}{100}$$

Ger oss lösningarna (genomför beräkningarna)

$$-\ln|120 - y| = \frac{1}{100} t + C$$

$y(0) = 80$ ger $-\ln|120 - 80| = 0 + C$, dvs $C = -\ln(40)$. För att kunna bestämma $y(60)$ behöver vi formulera lösningen $y(t)$ explicit, dvs vi behöver lösa ut $y(t)$ ur sambandet

$$-\ln|120 - y(t)| = \frac{1}{100} t - \ln(40)$$

Vi kan skriva om sambandet till (genomför gärna beräkningarna själva, det är ganska många steg)

$$|120 - y(t)| = 40e^{-t/100}$$

Högerledet är alltid positivt, så vi kan ta bort absolutbeloppet och lösa ut $y(t)$, vi får $y(t) = 120 - 40e^{-t/100}$. Så $y(60) = 120 - 40^{-60/100} \approx 98.05$, Svar: Efter en timme är det ca $\dfrac{98.05}{2000} \cdot 100 \approx 4.9\%$ alkohol.

(Differentialekvationen är linjär och av första ordningen och kan därför enkelt lösas numeriskt i Matlab. Men det kommer vi till nästa vecka i kursen.)

Svar

Det går ibland att använda den symboliska verktygslådan i Matlab (Symbolic toolbox) för att lösa separabla differentialekvationer. Nedan har jag skrivit upp koden jag använt för att bestämma lösningarna. (Skriv in texten i Matlab om du behöver svaren).

9.3.1

```
% Vi ska beräkna y(x) och skapar en symbolisk funktion y(x)
syms y(x)

% Definera differentialekvationen med Matlabs diff-kommando.
ode = diff(y,x)==3*x^2*y(x)^2;

% Lös differentialekvationen symboliskt (dvs. analytiskt)
ySol(x) = dsolve(ode)
```

9.3.5 Det går bara att bestämma lösningarna implicit, vi har $e^y - y = 2x + \sin(x) + C$, där C är en konstant. (Man kan använda kodmönstret i 9.3.1 och lösa differentialekvationen, men Matlab kommer att uttrycka svaret implicit mha `lambertw`-funktion. Googla gärna på `lambertw`, men släpp det sedan. `lambertw` ingår inte i kursen).

9.3.11

```
% Vi ska beräkna y(x) och skapar en symbolisk funktion y(x)
syms y(x)

% Definera differentialekvationen med Matlabs diff-kommando.
ode = diff(y,x)==x*exp(x);
% Definera begynnelsevillkoret
```

```
cond = y(0)==0

% Lös begynnelsevärdesproblemet
ySol(x) = dsolve(ode,cond)
```

(Observera att den naturliga logaritmen ln betecknas `log` i Matlab).

9.3.13
```
syms y(x)
ode = diff(y,x)==x/y(x); cond = y(0)==-3;
ySol(x)=dsolve(ode,cond)
```

(Använd gärna funktionen `simplify` om du vill förenkla svaret, eller förenkla det själv).

9.3.15 Vi kan bara uttrycka $y(x)$ implicit, så enklast är nog att använda Matlab för att hälpa till med beräkningarna (se de frivilliga labbarna som behandlar symboliska beräkningar).

```
% Beräkna G(x)
syms x
% definera g(x)=x*ln(x)
g = x*log(x);
% primitiv funktion till g(x)
int(g,x)

% Beräkna H(y)
syms y
h=y*(1+sqrt(3+y^2));
int(h,y)
```

Använd sedan begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ för att bestämma konstanten C, du bör få $C = \dfrac{41}{12}$