Differentialekvationer kan se ut på många olika sätt:

Den matematiska pendeln beskrivs med rörelseekvationen till höger. När man löser den vill man bestämma lösningen $\varphi(t)$ för olika begynnelseutslag. (Vi löser ekvationen numeriskt i sista uppgiften på sista laborationen).

$$\begin{cases} m\ell\,\ddot{\varphi}(t) = -mg\sin(\varphi(t)) - c\ell\dot{\varphi}(t) \\ (m, l, g, c \text{ konstanter }) \end{cases}$$

När man löser differentialekvationen till höger bestämmer man $y(x)$. Differentialekvationen är separabel.

$$y'(x) = 2x \cdot y(x)^2$$

Differentialekvationen till höger är linjär och av första ordningen. När man löser den bestämmer man $y(x)$

$$xy'(x) + y(x) = 2x$$

Differentialekvationen beskriver koncentrationen av glykos ($C(t)$) i blodet över tid. Här har man använt notationen $\dfrac{dC}{dt}$ för att beteckna derivatan $C'(t)$. Differentialekvationen är separabel (den är en av de rekommenderade övningarna).

$$\frac{dC}{dt} = r - kC \quad (k, r \;\text{ konstanter})$$

Idag: **separabbla differentialekvationer**

En separabel differentialekvation kan skrivas på formen

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

där g och h är kontinuerliga funktioner.

Exempel: Differentialekvationen $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2$ är separabel ty den kan skrivas $\dfrac{1}{y(x)^2} \cdot y'(x) = 2x$ $(y(x) \neq 0)$

Exempel: Differentialekvationen $\dfrac{dC}{dt} = r - kC \quad (k, r\;$ konstanter) är separabel ty den kan skrivas

$$\frac{1}{r - k \cdot C(t)} \cdot C'(t) = 1$$

Separabla differentialekvationer, $h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$, löses genom att hitta primitiva funktioner G och H till $g(x)$ och $h(y)$ och utnyttja att $H(y(x)) = G(x) + C$ där C är en konstant.

Låt $H(y(x))$ vara primitiv funktion till $h(y(x))$. Vi har (derivatan av sammansatt funktion)

$$H'(y(x)) = h(y(x)) \cdot y'(x)$$

dvs

$$H'(y(x)) = g(x)$$

Integrera vänster- och högerled:

$$H(y(x)) = \int g(x)dx = G(x) + C, \text{ där } C \text{ är en konstant}$$

Exempel: Lös $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2$

Vi har $h(y) = \dfrac{1}{y(x)^2}$, $H(y) = -\dfrac{1}{y(x)}$ och $g(x) = 2x$, $G(x) = x^2$

Så $-\dfrac{1}{y(x)} = x^2 + C$. Lös ut $y(x)$, vi får $y(x) = -\dfrac{1}{x^2 + C}$, där $C \neq -x^2$ är en konstant.

Vi ser också att $y(x) = 0$ också är en lösning eftersom den löser den ursprungliga ekvationen.

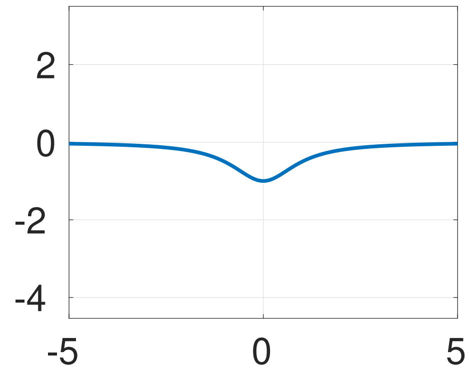
Exempel: Ett begynnelsevillkor bestämmer värdet på konstanten C i lösningen. Lös $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2, \quad y(0) = -1$

Vi har $y(x) = -\dfrac{1}{x^2 + C}$, $y(0) = -1 \Rightarrow -\dfrac{1}{0 + C} = -1$ dvs $C = 1$

Vi får lösningen $y(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

$y(x)$ närmar sig 0 då x växer mot ∞. Matlabkoden nedan ritar lösningskurvan för $-5 \leq x \leq 5$

```
y=@(x)-1./(1+x.^2);
x=linspace(-5,5);
plot(x,y(x));
grid on
```



Om vi istället har begynnelsevärdet $y(0) = 1$ får vi $C = -1$ och $y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$ (genomför beräkningarna). Lösningen gå mot ∞ då x närmar sig 1 från vänster. I praktiken innebär det att systemet som differentialekvationen beskriver kollapsar (eller att den använda matematiska modellen inte längre är relevant).

Så, lösningsgång för separabla differentialekvationer:

- Skriv ekvationen på formen $h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$
- Bestäm $H(y)$ och $G(x)$ genom $\int h(y)\ dy = \int g(x)\ dx$
- Försök lösa ut $y(x)$

Exempel: (Stewart s 601) Lös $y'(x) = \dfrac{6x^2}{2y + \cos(y)}$

- Skriv om ekvationen: $(2y + \cos(y))y'(x) = 6x^2$
- Bestäm de primitiva funktionerna: $\int 2y + \cos(y)\ dy = \int 6x^2\ dx$

Vi kan bara bestämma $y(x)$ implicit i den här ekvationen: $y(x)^2 + \sin(y(x)) = 2x^3 + C$

Matlabdelen

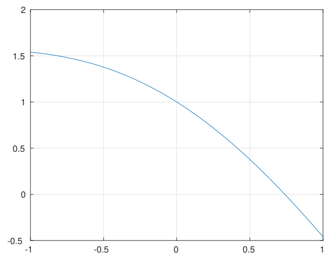
Newton's metod för att söka nollställen till en funktion $f(x)$ (repetition från läsperiod 1):

$$x_0 = \text{startvärde}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exempel: Bestäm nollställe till $f(x) = \cos(x) - x$.

Börja med att rita en figur för att se startvärdet:

```
f=@(x)cos(x)-x;
x = linspace(-1,1);
plot(x,f(x));
```



Vi har ett startvärde nära $x = 0.75$.

Förbättra approximationen $x_0 = 0.75$ med Newton's metod:
Vi har $f(x) = \cos(x) - x$ och $f'(x) = -\sin(x) - 1$

Handräkning:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.75 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.75 - \frac{\cos(0.75) - 0.75}{-\sin(0.75) - 1} = \ldots \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \ldots
\end{aligned}
$$

I Matlab:

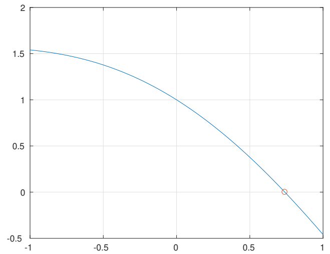
```
f = @(x)cos(x)-x;
df = @(x)-sin(x)-1;

xk = 0.75;
for k = 1:10
    h = -f(xk)/df(xk);
    xk = xk+h;
end
xk
```

I loopen ovan itererar man alltid 10 varv. Om man vill bryta loopen tidigare, t.ex. om $|h| < 0.5 \cdot 10^{-5}$, kan man infoga en `if`-sats och bryta loopen med `break`

```
xk = 0.75; tol=0.5e-5;
for k = 1:10
    h = -f(xk)/df(xk);
    xk = xk+h;
    if abs(h)<tol
        break;
    end
end
xk
```

Markera nollstället med en liten ring:

```
hold on
plot(xk,f(xk),'o');
```

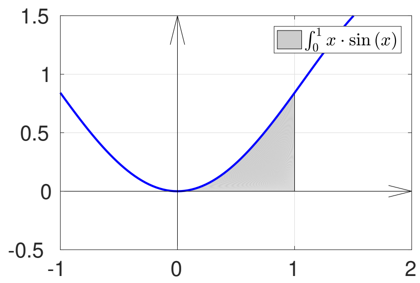


Integralberäkningar (också repetition från förra läsperioden).

När man bestämmer en integral

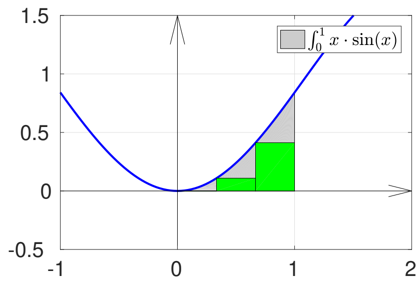
$$\int_a^b f(x)\ dx$$

kan man beräkna arean (med tecken) av området som begränsas av funktionskurvan, x-axeln och intervallet $a \leq x \leq b$. I bilden till höger har arean målats grå.



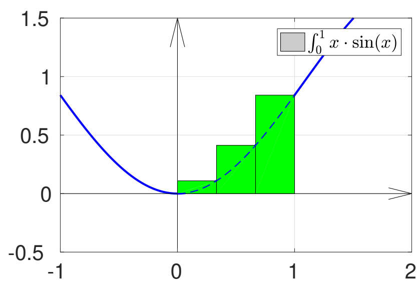
När man bestämmer integralen numeriskt approximerar man arean:

Vänster rektangelregel: Dela in intervallet $[a, b]$ i n delintervall, med bredden $h = \dfrac{b-a}{n}$. Låt höjden på varje rektangel vara funktionsvärdet i vänster ändpunkt av varje delintervall. Summera alla rektangelareor för att få hela areaapproximationen.




```
f = @(x)x.*sin(x);
a = 0; b = 1; n = 3;
x = linspace(a,b,n+1);
h = (b-a)/n;
qv = sum(h*f(x(1:n)))
```

Höger rektangelregel: Låt höjden på varje rektangel vara funktionsvärdet i höger ändpunkt av varje delintervall.




```
qh = sum(h*f(x(2:n+1)))
```

Mittpunktsmetoden: Låt höjden på varje rektangel vara funktionsvärdet i mitten på varje delintervall.

```
qm = sum(h*f(x(1:n)+h/2))
```

Trapetsmetoden slutligen är medelvärdet av vänster och höger rektangelregel:

```
(qv+qh)/2
```