Övningarna

Lös differentialekvationerna:

17.1.1 $y'' - y' - 6y = 0$

17.1.3 $y'' + 2y = 0$

17.1.5 $4y'' + 4y' + y = 0$

17.1.9 $y'' - 4y' + 13y = 0$

17.1.11 $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

Lös begynnelsevärdesproblemen

17.1.17

$$\begin{cases} y'' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$$

17.1.19

$$\begin{cases} 9y'' + 12y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lös randvärdesproblemet

17.1.27

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 5, y(\pi/4) = 3 \end{cases}$$

Övningshjälp

Nedan finns tips och ledning till de rekommenderade övningarna. Jag har inte löst dem helt, utan tanken är att du ska fylla i det som saknas. Det är viktigt att träna att räkna med penna och papper.

17.1: Alla differentialekvationerna nedan är homogena, av ordning 2, med konstanta koefficienter och linjära.

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

Så det går att bestämma lösningarna genom att bestämma rötterna till den karekteristiska ekvationen

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

1: r_1, r_2 reella och $r_1 \neq r_2$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$

2: r_1, r_2 reella och $r_1 = r_2$ $(= r_0)$: Lösningen ges av $y(x) = c_1 \cdot e^{r_0 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{r_0 x}$

3: r_1, r_2 komplexa, $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$: Lösningen ges av $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))$

c_1 och c_2 är konstanter.

17.1.1 $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $r^2 - r - 6 = 0$ som har två reella rötter $r_1 = \dots$ och $r_2 = \dots$. Lösningarna ges av det 1:a fallet ovan: $y(x) = \dots$.

17.1.3 $y''(x) + 2y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $\dots$ som har två komplexa rötter $r_1 = \dots$ och $r_2 = \dots$. Lösningarna ges av det 3:e fallet ovan $y(x) = \dots$

17.1.5 $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $\dots$ som har en dubbelrot $r_0 = \dots$. Lösningarna ges av det 2:a fallet ovan $y(x) = \dots$

17.1.9 Lös på samma sätt som i uppgift 1, 3, 5 ovan

17.1.11 $2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0$. Lös på samma sätt som uppgift 1, 3, 5 ovan

17.1.17 $y''(x) + 3y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3 \Rightarrow$ Karekteristisk ekvation $r^2 + 3 = 0$ som har två komplexa rötter $r_{1,2} = \dots$. Lösningarna ges av det 3:e fallet ovan $y(x) = \dots$.

Med hjälp av begynnelsevärdena $y(0) = 1, y'(0) = 3$ bestämmer man värdena på konstanterna c_1 och c_2: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x) \Rightarrow y'(x) = \dots$ och
$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 \cos(\sqrt{3} \cdot 0) + c_2 \cos(\sqrt{3} \cdot 0) \Rightarrow c_1 = \dots$
$y'(0) = 3 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_2 = \dots$

17.1.19 , 17.1.21, 17.1.23 Lös på samma sätt som 17.1.17

17.1.27 $y''(x) + 4y(x) = 0, y(0) = 5, y(\pi/4) = 3$ kallas randvärdesproblem. Bestäm lösningarna $y(x)$ på samma sätt som i 17.1.17. Använd sedan värdena på $y(0)$ och $y(\pi/4)$ för att bestämma värden på konstanterna c_1 och c_2

Svar

17.1.1 $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

17.1.3 $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)$

17.1.5 $y(x) = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2}$

17.1.9 $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$

17.1.11 $y(t) = C_1 e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + C_2 e^{-(\sqrt{3}+1)t/2}$

17.1.17 $y(x) = \cos(\sqrt{3x}) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}x)$

17.1.19 $y(x) = e^{-2x/3} + \dfrac{2}{3} x e^{-2x/3}$

17.1.27 $y(x) = 5\cos(2x) + 3\sin(2x)$