MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion T.1

Geometri:

Geometri betyder "jordmätning" och har studerats av människan i tusentals år.

De första som byggde upp en stringent matematisk teori (med def., satser & bevis) var de gamla grekerna. Det fanns många framstående antika grekiska matematiker (Archimedes, Apollonius, Euklides, Eudoxos, Pythagoras, ...) och geometrin var oftast deras främsta gren.

De flesta av dessa verk har gått förlorade, men ett verk har alltid funnits i många exemplar:

Elementa av Euklides

Denna skrevs ca 300 f.kr. och är en sammanställning av en stor del av den matematiska kunskapen fram tills dess (främst geometri men även talteori).

Ansågs vara den gyllene standarden för hur ett "vetenskapligt" verk ska vara i mer än 2000 år. T.ex. så organiserade Newton sitt verk "Principia" efter samma modell. Därtill bevisades alla satser av Newton m.h.a. geometriska argument i Euklides anda för att ge dem "vetenskaplig tyngd".

I Elementa presenteras en s.k. axiomatisk framställning av geometrin:

$(i)_E$ Euklides ger först en lista på 23 definitioner (punkt, linje, yta, vinkel, ...)

Def. 1 : En punkt är det som saknar delar

Def. 2 : En linje är det som saknar bredd

⋮

(i)$_N$ Newton börjar med 8 definitioner (massa, rörelsemängd, "inherent force", "impressed force", "centripetal force", 3 begrepp associerade med centripetalkrafter).

(ii)$_E$ Euklides listar därefter 5 s.k. axiom, som är grundläggande geom. egenskaper som är så pass "självklara" att de inte behöver bevisas. Axiom nr. 5 är dock betydligt krångligare än de andra.

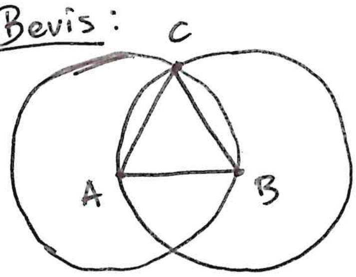
(ii)$_N$ Newton listar 3 s.k. lagar som beskriver grundläggande egenskaper för massa, krafter, rörelsemängd och hur dessa hänger ihop (Lag 2: $F = ma$, Newton säger faktiskt: $F = \frac{dp}{dt}$)

(iii) Både Euklides och Newton bygger sedan stegvis, med utgångspunkt från def. + axiom/lagar upp en logiskt konsekvent (dvs fri från motsägelser) teori med satser och bevis.

Vi ska strax beskriva den moderna axiomatiska framställningen av geometri, men vi börjar med de två första satserna i Elementa för att få en känsla för "bygget".

<u>Bok 1, Prop 1</u>: Givet en sträcka AB kan man (med passare och linjal) konstruera en liksidig triangel med AB som sida.

<u>Bevis</u>:



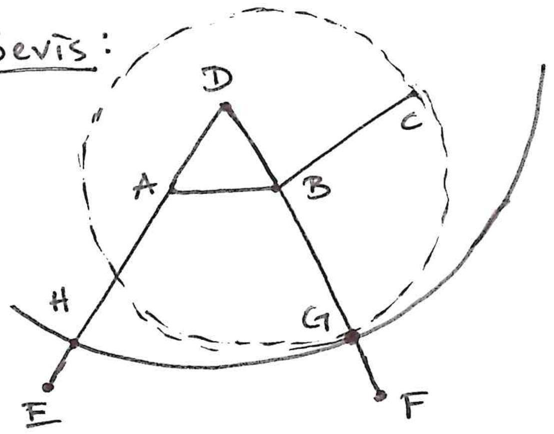
Drag två cirklar med radie = |AB| en med centrum i A och en med centrum i B.

Låt C vara en av skärningspunkterna

mellan cirklarna. Drag AC och BC. Triangeln ABC ($\triangle ABC$) kommer att vara liksidig då $|AB| = |AC|$ och $|AB| = |BC|$ ty radier till samma cirkel. ∎

<u>Bok 1, Prop. 2</u>: Givet en punkt A och en sträcka BC, kan man konstruera en sträcka av längd $|BC|$, med utgångspunkt i A.

<u>Bevis</u>:



Bilda AB och en liksidig $\triangle ABD$ med sida AB enl. prop. 1. Dra ut sträckorna DA och DB en bit, säg till E resp. F. Drag en cirkel med centrum i B och radie $= |BC|$. Låt G vara skärningen mellan denna cirkel och DF. Drag en cirkel med centrum i D och radie $= |DG|$. Låt H vara skärningen mellan denna cirkel och DE. Då är AH lika lång som BC ty:

1. $|BC| = |BG|$ (radier till samma cirkel)
2. $|DG| = |DH|$ (——— " ———)

så $|AH| = |BG| = |BC|$ då $|DA| = |DB|$ (liksidig $\triangle$) ∎

Och så här fortsätter det. Sida upp och sida ner i 13 "böcker" (kapitel) med totalt 465 satser, några av dem riktigt djupa och avancerade (se bl.a. Euclidea). Allt utifrån 5 enkla axiom.

Med moderna mått är Elementa bristfällig på bl.a. tre punkter:

I. Några av de grundläggande definitionerna är nonsens. ("En punkt är det som saknar delar" vad betyder "del"?)

II. Parallellaxiomet - Går det att bevisa med de 4 andra? Kan man bygga upp en logiskt konsekvent teori utan det?

III. Det finns en del luckor - Många "underförstådda" egenskaper på Euklides tid måste bevisas för att uppfylla modern standard på matematisk stringens.

Vi kommer att följa framställningen i "Geometri" av Olof Hanner (finns på Canvas) som i korthet hanterar detta med:

I. Vissa grundläggande begrepp definieras ej.

II. Visa så många satser som möjligt utan parallellaxiomet och förklara när det behövs och vad som händer utan det.

III. Utgå från en ny uppsättning axiom som inte leder till ett bygge med luckor.

Geometri som inte bygger på parallellaxiomet kallas för neutral (hyperbolisk el. enkl.) eller sfärisk geomtri.

<u>Axiom för neutral (absolut?) geometri</u>: (OH: 4.2)

Vi har följande grundläggande begrepp (dvs begrepp som inte definieras):

(i) En mängd av element kallade <u>punkter</u>

(ii) En mängd av element kallade <u>linjer</u>

(iii) En relation mellan punkt och linje (punkten ligger på linjen, alt. linjen går genom punkten)

(iv) Två <u>ordningsrelationer</u> för punkterna på en linje

(v) En mängd avbildningar av mängden punkter på sig själv kallade <u>kongruenstransformationer</u> (KT)

(KT = avståndsbevarande avbildningar = translationer, rotationer & speglingar)

Dessa ska uppfylla 4 axiom:

ABS 1) För två olika punkter finns en och endast en linje genom punkterna. ■

Två olika linjer kan alltså som mest ha en punkt gemensamt, deras s.k. <u>skärningspunkt</u>. Två linjer som inte har någon skärningspunkt sägs vara <u>parallella</u>.

ABS 2) Mängden av alla punkter på en linje är med endera ordningsrelationen isomorf med (dvs matematiskt "samma sak" som) den ordnade mängden av reella tal. ■

Av egenskaperna för $\mathbb{R}$ följer då t.ex. att det alltid finns ∞ många punkter mellan två olika punkter A, B på en linje.

A, B och alla punkter mellan A och B kallas <u>sträckan</u> AB

Varje punkt på en linje delar linjen i två delar. Var och en av dessa kallas en <u>stråle</u>.

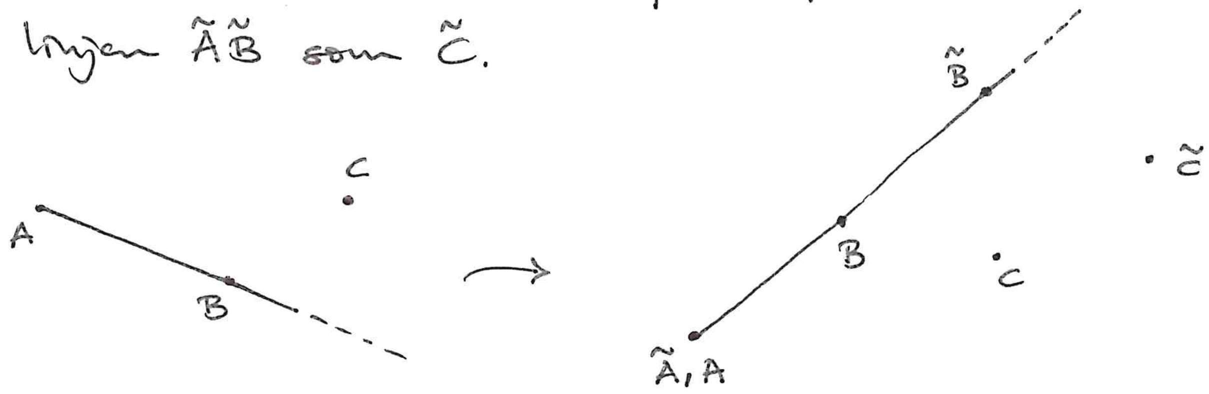
ABS 3) De punkter som inte ligger på en linje L bildar två icke-tomma delmängder som kallas L:s <u>sidor</u>. A och B ligger på samma sida om L om och endast om AB inte skär L.

ABS 4) (a) En KT överför linjer på linjer

(b) En KT bibehåller eller kastar om ordningsföljden mellan punkterna på en linje.

(c) Mängden av KT bildar en grupp under sammansättn.

(d) Om A, B, C är tre punkter som inte ligger i linje, och $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ är tre punkter som inte ligger i linje, finns en och endast en KT som avbildar A på $\tilde{A}$, strålen AB i strålen $\tilde{A}\tilde{B}$ och C i en punkt på samma sida om linjen $\tilde{A}\tilde{B}$ som $\tilde{C}$.



Lägger man till parallellaxiomet till dessa kan man bygga upp hela den Euklidiska geometrin (dvs Elementa) på ett logiskt konsekvent sätt utan luckor.